UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Trabajo Final de Licenciatura en Matemática Aplicada

# Espacios de Tipo Homogéneo y Metrización

Ana Emilia de Orellana

**Directora**
Marisa Toschi
IMAL (CONICET - UNL) – FHUC (UNL)

**Co-Director**
Mauricio Ramseyer
IMAL (CONICET - UNL) – FIQ (UNL)

Santa Fe, Argentina
Diciembre 2022

Ana Emilia de Orellana
anaemilia.deorellana@gmail.com
Lic. en Matemática Aplicada
Tema: Análisis
17/03/2023

# Índice general

# Introducción

La propuesta de este trabajo consiste en abordar la estructura geométrica de un espacio $(\mathbb{X}, d, \mu)$ de tipo homogéneo estudiando la relación entre la topología del espacio y la elección de la casi-métrica asignada.

Además nos centramos en el contexto de los pesos de Muckenhoupt como una de las tantas aplicaciones de poder cambiar la casi-métrica por otra más adecuada.

Comenzamos estudiando los espacios casi-métricos, haciendo énfasis en las diferencias geométricas entre éstos y los espacios métricos, en particular analizando la propiedad de que las bolas definidas por la métrica o por la casi-métrica asociada sean o no conjuntos abiertos. Esta diferencia puede resultar problemática para ciertas aplicaciones en análisis, por lo tanto mostramos un conocido teorema dado por Macías y Segovia en [**MS79**], donde dada una casi-métrica se encuentra otra equivalente para la cual las bolas son conjuntos abiertos. En la demostración del teorema mencionado se hace uso de las estructuras uniformes y del lema de metrización para espacios uniformes. Al no haber una referencia exacta del lema utilizado, nos basamos en un resultado de [**Kel75**], que si bien no puede ser aplicado en forma directa, nos permitirá, luego de una reescritura de su demostración, obtener el resultado necesario para continuar con la demostración de Macías y Segovia.

Luego, avanzamos en el estudio de la estructura de los espacios de tipo homogéneo, donde las propiedades de la medida juegan un rol fundamental para las diferentes aplicaciones. Una vez familiarizados con su geometría estudiamos los espacios $\alpha$-Ahlfors, donde las medidas de las bolas son equivalentes a potencias de sus radios. Vemos que a pesar de que no todos los espacios de tipo homogéneo son $\alpha$-Ahlfors para algún $\alpha$, es posible definir otra casi-métrica manteniendo la topología original del espacio de tal forma que sí sea 1-Ahlfors.

Por otra parte estudiamos el operador maximal de Hardy-Littlewood aplicado a una medida, así como el resultado de [**ACDT14**], donde los autores hallan una familia de pesos en $A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ siempre que el espacio sea 1-Ahlfors. Finalmente, analizamos una de tantas aplicaciones del resultado de Macías y Segovia, centrándonos en el resultado de Aimar, Carena y Toschi en [**ACT14**] donde prueban que las clases de pesos de Muckenhoupt definidas sobre los espacios de tipo homogéneo con la casi-métrica original y la definida por Macías y Segovia son equivalentes. Esto nos permite hallar una familia de pesos relacionada con las distancias a un subconjunto $s$-dimensional, cuando el espacio de tipo homogéneo no necesariamente es Ahlfors.

Capítulo 1

# Espacios métricos y casi-métricos

En este capítulo daremos una breve introducción a los espacios casi-métricos, esto es, conjuntos dotados de una casi-métrica. Mostraremos las propiedades geométricas de las bolas y su relación con los conjuntos abiertos. Profundizaremos en un resultado importante dado por Macías y Segovia ([**MS79**]) en el cual se define una casi-métrica equivalente a la dada inicialmente de manera tal que las bolas preserven la propiedad de ser conjuntos abiertos.

## 1.1. Definiciones y ejemplos

Definición 1.1. Dado un conjunto $\mathbb{X}$, se dice que una función $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ es una **casi-métrica** si para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$ se cumplen

(CM1) $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
(CM2) $d(x,y) = d(y,x)$.
(CM3) Existe una constante $K \geq 1$ tal que

$$d(x,y) \leq K\big(d(x,z) + d(z,y)\big).$$

El par $(\mathbb{X}, d)$ es denominado **espacio casi-métrico**, y la constante $K$ es llamada **constante triangular**.

En particular si $K = 1$ se dice que $d$ es una **métrica** y $(\mathbb{X}, d)$ un **espacio métrico**.

Ejemplo 1.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la función $|\cdot|$ definida como

$$|x-y| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

para $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ es un espacio métrico.

Las condiciones (CM1) y (CM2) se satisfacen trivialmente. Para demostrar (CM3) recordemos antes la desigualdad de Cauchy Buniakovski, la cual nos dice que dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ se tiene la siguiente relación para sus coordenadas

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Luego, aplicando la desigualdad anterior vemos que

$$\begin{aligned}
&(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2\\
&\quad=\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)+2\left(a_1b_1+\cdots+a_nb_n\right)+\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)\\
&\quad\le\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)+2\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}+\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)\\
&\quad=\left(\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\right)^2,
\end{aligned}$$

y tomando raíz cuadrada en ambos miembros se obtiene

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}\le\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Finalmente, para cada $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, aplicando lo anterior a las componentes de $a = x - z$ y $b = z - y$ se tiene

$$\begin{aligned}
|x-y|&=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\\
&=\sqrt{\big((x_1-z_1)+(z_1-y_1)\big)^2+\cdots+\big((x_n-z_n)+(z_n-y_n)\big)^2}\\
&\le\sqrt{(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2}+\sqrt{(z_1-y_1)^2+\cdots+(z_n-y_n)^2}\\
&=|x-z|+|z-y|.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $|\cdot|$ satisface (CM3) con constante triangular $K = 1$ y por lo tanto es una métrica haciendo que $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ sea un espacio métrico; a la métrica $|\cdot|$ se la suele llamar *distancia en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2. Sobre un conjunto no vacío $\mathbb{X}$ se define la *métrica discreta* como

$$d(x,y)=\begin{cases}0\,, & \text{si } x=y;\\ 1\,, & \text{si } x\neq y.\end{cases}$$

En este caso, las propiedades (CM1), (CM2) y (CM3) se cumplen trivialmente con $K = 1$. Al espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ se lo suele llamar *espacio métrico discreto*.

Ejemplo 1.3. Dado un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$, la función

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},$$

definida para $x, y \in \mathbb{X}$ es una métrica sobre $\mathbb{X}$. Para demostrar esto notar que $d'(x, y) = 0$ si y sólo si $d(x, y) = 0$ y por ser $d$ una métrica, esto sucede si y sólo si $x = y$. Además $d(x, y) \ge 0$, con lo cual $d'$ cumple (CM1).

Por otro lado, como $d$ satisface (CM2), es claro que $d'$ también la satisface. En efecto, para $x, y, z \in \mathbb{X}$,

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=d'(y,x).$$

Finalmente, usando (CM1) y (CM3) para $d$,

$$\begin{aligned}
d'(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,z)} \\
&\leq 1 - \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\
&= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\
&\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \\
&= d'(x,y) + d'(y,z).
\end{aligned}$$

Entonces $d'$ es una casi-métrica con constante triangular $K = 1$.

Ejemplo 1.4. Dado $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico, el espacio $(\mathbb{X}, d^\beta)$, con $0 < \beta \leq 1$ también es un espacio métrico.

Para ver (CM1) consideremos la función biyectiva $t \mapsto t^\beta$ en $[0, \infty)$. Es claro que $d(x,y) \geq 0$ implica $d^\beta(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$. Ahora, si $d^\beta(x,y) = 0$, usando la biyectividad de la función mencionada se tiene que $d(x,y) = 0$, luego por (CM1) para $d$ se concluye que $x = y$ y $d^\beta$ cumple la condición (CM1). Por otro lado, como $d(x,y) = d(y,x)$ entonces $d^\beta(x,y) = d^\beta(y,x)$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$, por lo tanto (CM2) es trivial. Luego basta probar (CM3). Para ello, veamos que para $a, b \geq 0$ y $0 < \beta \leq 1$

$$(a+b)^\beta \leq a^\beta + b^\beta. \tag{1}$$

Si $a = 0$ o $b = 0$, (1) se satisface trivialmente con igualdad. Si $a, b > 0$, sea $\alpha \in [0, 1)$ tal que $\beta = 1 - \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned}
(a+b)^\beta &= (a+b)^{1-\alpha} \\
&= (a+b)(a+b)^{-\alpha} \\
&= a(a+b)^{-\alpha} + b(a+b)^{-\alpha} \\
&\leq aa^{-\alpha} + bb^{-\alpha} \\
&= a^{1-\alpha} + b^{1-\alpha} \\
&= a^\beta + b^\beta.
\end{aligned}$$

Ahora, por ser $d$ una métrica, para $x, y, z \in \mathbb{X}$, tomando $a = d(x,z)$ y $b = d(z,y)$ en (1) tenemos

$$d(x,y)^\beta \leq \big(d(x,z) + d(z,y)\big)^\beta \leq d(x,z)^\beta + d(z,y)^\beta,$$

como queríamos probar.

Con esta idea de analizar potencias de una métrica, nos preguntamos qué sucede si $\beta > 1$. Esto tiene un interés directo en el área del análisis armónico, ya que funciones del tipo $d(x,y) = |x-y|^n$ aparecen naturalmente, por ejemplo, en operadores muy conocidos como la

Transformada de Riesz sobre $\mathbb{R}^n$. Veremos en los siguientes ejemplos que las potencias mayores que 1 de una métrica definen una casi-métrica, pero no necesariamente una métrica.

Ejemplo 1.5. En $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|^p$ no es una métrica si $p > 1$. En efecto, tomando $x = 0$, $y = 2$ y $z = 1$ tenemos $|x-y|^p = 2^p$, $|x-z|^p = 1$ y $|y-z|^p = 1$. Entonces

$$|x-y|^p = 2^p > 2 = |x-z|^p + |z-y|^p,$$

con lo cual (CM3) no se satisface.

Ejemplo 1.6. El espacio $(\mathbb{X}, d^\beta)$ es un espacio casi-métrico para toda métrica $d$ y todo $\beta > 1$.

Las condiciones (CM1) y (CM2) son análogas al caso $0 < \beta \leq 1$ vistas en el Ejemplo 1.4, dado que la función $t \mapsto t^\beta$, para $\beta > 1$, también es biyectiva. Para ver (CM3) notar que la función mencionada es convexa en $[0,\infty)$, esto es, para cada $\alpha \in [0,1]$

$$\big(\alpha t + (1-\alpha)s\big)^\beta \leq \alpha t^\beta + (1-\alpha)s^\beta,$$

para todo $t, s \in [0,\infty)$. Luego, siendo $\alpha \in [0,1]$, $t, s \in [0,\infty)$ y usando que la función es creciente se tiene

$$\begin{aligned} \min\{\alpha, 1-\alpha\}^\beta (t+s)^\beta &\leq \big(\alpha t + (1-\alpha)s\big)^\beta \\ &\leq \alpha t^\beta + (1-\alpha)s^\beta \\ &\leq \max\{\alpha, 1-\alpha\}(t^\beta + s^\beta), \end{aligned}$$

y para $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$(t+s)^\beta \leq 2^{\beta-1}(t^\beta + s^\beta), \tag{2}$$

alcanzándose la igualdad cuando $t = s = 1$. Tomando $t = d(x,z)$ y $s = d(z,y)$ para $x, y, z \in \mathbb{X}$ y usando la desigualdad triangular para $d$ se tiene

$$d^\beta(x,y) \leq \big(d(x,z) + d(z,y)\big)^\beta \leq 2^{\beta-1}\big(d^\beta(x,z) + d^\beta(z,y)\big),$$

por lo que $d^\beta$ cumple la propiedad (CM3) con constante triangular $K = 2^{\beta-1} > 1$. Como la constante es óptima, $d^\beta$ es una casi-métrica sobre $\mathbb{X}$.

Notar que si $d$ es una casi-métrica con constante triangular $\widetilde{K}$, $d^\beta$ también lo es para $\beta > 0$, donde la constante triangular de $d^\beta$ depende de la constante triangular de $d$. Más precisamente, la constante triangular para $d^\beta$ es $2^{\beta-1}\widetilde{K}^\beta$, lo que se sigue de utilizar la desigualdad (2) para la casi-métrica $d$.

Definición 1.2. Dado un espacio casi-métrico $(\mathbb{X}, d)$, se define la **bola** con centro en $x \in \mathbb{X}$ y radio $r > 0$ con respecto a la casi-métrica $d$ como

$$B_d(x,r) = \{y \in \mathbb{X} : d(y,x) < r\}.$$

Cuando no haya confusión sobre qué casi-métrica se está usando, escribiremos simplemente $B(x, r)$.

DEFINICIÓN 1.3. Un subconjunto $A$ del espacio casi-métrico $(\mathbb{X}, d)$ es un **conjunto abierto** si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subset A.$$

DEFINICIÓN 1.4. Sea $\mathbb{X}$ un conjunto. Dada una elección $\mathscr{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ denota al conjunto de partes de $\mathbb{X}$, $\mathscr{T}$ es una **topología** en $\mathbb{X}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(O1) $\varnothing \in \mathscr{T}$ y $\mathbb{X} \in \mathscr{T}$.
(O2) si $U, V \in \mathscr{T}$ entonces $U \cap V \in \mathscr{T}$.
(O3) si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección arbitraria de conjuntos de $\mathscr{T}$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \subset \mathscr{T}$.

El par $(\mathbb{X}, \mathscr{T})$ es denominado **espacio topológico**.

EJEMPLO 1.7. Dado un conjunto $\mathbb{X}$, la *topología trivial* es la dada por $\mathscr{T}_{\text{trivial}} = \{\varnothing, \mathbb{X}\}$ y la *topología discreta* está formada por las partes de $\mathbb{X}$, esto es $\mathscr{T}_{\text{discreta}} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$.

EJEMPLO 1.8. En $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ se define la *topología estándar* $\mathscr{T}_s$ como aquel conjunto formado por los subconjuntos $U$ de $\mathbb{R}^n$ tales que para todo $x \in U$ existe $r > 0$ con $B(x, r) \subset U$.

En efecto, la propiedad (O1) se satisface trivialmente. Para ver (O2) sean $U, V \in \mathscr{T}_s$ y $x \in U \cap V$. Luego, existen $r_U, r_V > 0$ tales que $B(x, r_U) \subset U$ y $B(x, r_V) \subset V$. Así, tomando $r = \text{mín}\{r_U, r_V\}$ se tiene $B(x, r) \subset U \cap V$, con lo cual $U \cap V \in \mathscr{T}_s$.

Para ver (O3), sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos de $\mathscr{T}_s$ y sea $x \in \cup_{i\in I} U_i$. Luego existen $j \in I$ y $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U_j \subset \cup_{i\in I} U_i$, por lo tanto $\cup_{i\in I} U_i \in \mathscr{T}_s$.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio casi-métrico. Luego el conjunto $\mathscr{T}$ definido como*

$$\mathscr{T} = \{U \subset \mathbb{X} \,:\, \textit{para todo } x \in U \textit{ existe } r > 0 \,:\, B(x, r) \subset U\},$$

*es una topología sobre $\mathbb{X}$ y es denominada la **topología inducida por la casi-métrica d**.*

DEMOSTRACIÓN. Notar que en el Ejemplo 1.8 no se utiliza la desigualdad triangular que $|\cdot|$ satisface. Con lo cual, la demostración para el caso general de un espacio casi-métrico $(\mathbb{X}, d)$ es análoga a la realizada en el Ejemplo 1.8. □

DEFINICIÓN 1.5. Dado un conjunto no vacío $\mathbb{X}$, dos casi-métricas $d$ y $d'$ definidas sobre $\mathbb{X}$ son **equivalentes**, y se denota por $d \sim d'$, si existen constantes positivas $c_1$ y $c_2$ tales que para todos $x, y \in \mathbb{X}$ se cumple que

$$c_1 d'(x, y) \leq d(x, y) \leq c_2 d'(x, y).$$

LEMA 1.1. *Dados dos espacios casi-métricos* $(\mathbb{X}, d)$ *y* $(\mathbb{X}, d')$*, donde* $d \sim d'$*, las topologías* $\mathscr{T}_d$ *y* $\mathscr{T}_{d'}$ *inducidas por las casi-métricas* $d$ *y* $d'$ *respectivamente son la misma, esto es,* $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_{d'}$ *y* $\mathscr{T}_d \supset \mathscr{T}_{d'}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Si $U \in \mathscr{T}_d$ entonces para todo $x \in U$ existe una constante $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subset U$. Sean $c_1, c_2 > 0$ como en la Definición 1.5 y consideremos $\delta = \frac{r}{c_2}$. Si $y \in B_{d'}(x, \delta)$ entonces

$$d(x, y) \leq c_2 d'(x, y) < c_2 \delta = r,$$

luego $y \in B_d(x, r)$ y entonces $B_{d'}(x, \delta) \subset U$, de donde se tiene que $U \in \mathscr{T}_{d'}$.

La otra inclusión es análoga tomando $\delta = c_1 r > 0$ y usando la otra desigualdad entre las casi-métricas. Así, el lema queda probado. □

Veremos a continuación una propiedad geométrica que satisfacen las bolas en los espacios métricos y cómo esta propiedad es heredada por las casi-métricas definidas como en el Ejemplo 1.6.

PROPOSICIÓN 1.2. *Si* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico entonces las bolas son conjuntos abiertos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in \mathbb{X}$, $r > 0$ y sea $y \in B(x, r)$. Denotamos por $\eta = d(x, y) < r$ y definimos $\delta = r - \eta > 0$. Luego, si $z \in B(y, \delta)$, por ser $d$ una métrica

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \eta + r - \eta = r,$$

lo que prueba que existe $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset B(x, r)$. □

En el Ejemplo 1.4 vimos que si $0 < \beta \leq 1$ entonces $(\mathbb{X}, d^\beta)$ es un espacio métrico y por la proposición anterior se tiene que las bolas son conjuntos abiertos. Esta propiedad también vale para $\beta > 1$, como veremos en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.3. *Dado el espacio* $(\mathbb{X}, d^\beta)$ *donde* $d$ *es una métrica y* $\beta > 0$*, las bolas son conjuntos abiertos.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $x \in \mathbb{X}$, $r > 0$ y sea $y \in B_{d^\beta}(x, r)$. Luego $d^\beta(x, y) < r$ con lo cual $y \in B_d\big(x, r^{\frac{1}{\beta}}\big)$. Por ser $d$ una métrica existe $r_0 > 0$ tal que $B_d(y, r_0) \subset B_d\big(x, r^{\frac{1}{\beta}}\big)$, puesto que esta última es un conjunto abierto según la Proposición 1.2.

Afirmamos que $B_{d^\beta}\big(y, r_0^\beta\big) \subset B_{d^\beta}(x, r)$. Para ver esto, consideremos $z \in B_{d^\beta}\big(y, r_0^\beta\big)$. Entonces $d^\beta(y, z) < r_0^\beta$ y así $d(y, z) < r_0$, por ser $\beta > 0$. Luego se tiene $z \in B_d(y, r_0) \subset B_d\big(x, r^{\frac{1}{\beta}}\big)$. Esto implica que $d(x, z) < r^{\frac{1}{\beta}}$ y por lo tanto $d^\beta(z, x) < r$ y se sigue la contención que se quería probar. □

Como vimos anteriormente, las bolas definidas a través de una métrica siempre serán conjuntos abiertos. Más aún, las bolas definidas por casi-métricas de la forma $d^\beta$, con $\beta > 0$, también tienen esta propiedad, como vimos arriba. Sin embargo, en el caso de las bolas definidas por casi-métricas generales, esto no es necesariamente cierto como se ve en el siguiente ejemplo que puede encontrarse en [**PS09**].

Ejemplo 1.9. Se define la función $d : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ para algún $\varepsilon > 0$ fijo como

$$d(n,m) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } n = m\,; \\ 1\,, & \text{si } n = 0 \text{ y } m = 1\,; \\ 1+\varepsilon\,, & \text{si } n = 0 \text{ y } m \geq 2\,; \\ \frac{1}{m}\,, & \text{si } n = 1 \text{ y } m \geq 2\,; \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\,, & \text{si } m > n \geq 2, \end{cases}$$

siempre que $0 \leq n \leq m$, y $d(n,m) = d(m,n)$ para todo $0 \leq m < n$.

Veamos que $d$ es una casi-métrica para $\mathbb{N}_0$. Las condiciones (CM1) y (CM2) en la Definición 1.1 se satisfacen trivialmente. Para probar (CM3) veamos primero que $d$ no puede ser una métrica, es decir, que (CM3) no se satisface con $K = 1$. Fijado $\varepsilon > 0$, y tomando $k = 0$, $m = 1$ y $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $n > \max\{2, \frac{1}{\varepsilon}\}$, tenemos que $d(k,n) = 1+\varepsilon$, $d(k,m) = 1$ y $d(m,n) = \frac{1}{n}$. Entonces, para estos valores vemos que

$$d(k,n) = 1 + \varepsilon \nleq 1 + \frac{1}{n} = d(k,m) + d(m,n),$$

como queríamos probar.

Ahora veamos que (CM3) se satisface con $K = 1+\varepsilon$, esto es, dados $k, n, m \in \mathbb{N}_0$, se cumple la desigualdad

$$d(k,n) \leq (1+\varepsilon)\big(d(k,m) + d(m,n)\big). \tag{3}$$

Es claro que si dos de las variables son iguales la desigualdad vale. Supongamos a partir de ahora que las variables son todas distintas y tomemos primero $k = 0$. Entonces

$$d(0,n) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } n = 1; \\ 1+\varepsilon\,, & \text{si } n \geq 2, \end{cases}$$

y si $m > n$,

$$d(m,n) = \begin{cases} \frac{1}{m}\,, & \text{si } n = 1; \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\,, & \text{si } m > n \geq 2. \end{cases}$$

Entonces, para $n = 1$ y $m > 1$,

$$d(0,1) = 1 < 1+\varepsilon < (1+\varepsilon)\Big(1+\varepsilon+\frac{1}{m}\Big) = (1+\varepsilon)\big(d(0,m) + d(m,1)\big),$$

y si $2 \leq n < m$,

$$\begin{aligned} d(0,n) = 1+\varepsilon &< (1+\varepsilon)\Big(1+\varepsilon+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\Big) \\ &= (1+\varepsilon)\big(d(0,m)+d(m,n)\big). \end{aligned} \tag{4}$$

Si $2 \leq m < n$ se obtiene (3) en forma análoga a (4), cambiando los roles de $m$ y $n$.

Si $m = 1$ y $n > 1$,

$$d(0,n) = 1 + \varepsilon < (1+\varepsilon)\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = (1+\varepsilon)\big(d(0,1) + d(1,n)\big).$$

Con esto concluye el caso $k = 0$. Ahora consideramos que $n = 0$ y $k, m \geq 1$. Por lo visto anteriormente y usando la simetría de $d$, se tiene

$$\begin{aligned} d(k,0) &= d(0,k) \\ &\leq (1+\varepsilon)\big(d(0,m) + d(m,k)\big) \\ &= (1+\varepsilon)\big(d(m,k) + d(0,m)\big) \\ &= (1+\varepsilon)\big(d(k,m) + d(m,0)\big). \end{aligned} \tag{5}$$

Por último, si $m = 0$, dado que $d(k,n) < 1$ y $d(k,0), d(0,n) \geq 1$ para todo $k, n \geq 1$, se tiene

$$d(k,n) \leq 1 + \varepsilon < (1+\varepsilon)\big(d(k,0) + d(0,n)\big).$$

Supongamos ahora que $k = 1$ y $n, m \geq 2$. Por la definición de $d$ se tiene

$$d(1,n) < (1+\varepsilon)\frac{1}{n} < (1+\varepsilon)\Big(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\Big) = (1+\varepsilon)\big(d(1,m) + d(m,n)\big).$$

Por una cuenta similar a (5) se ve que el caso $n = 1$, $k, m \geq 2$ también vale.

Ahora, si $m = 1$ y $k, n \geq 2$, entonces

$$d(k,n) = \frac{1}{k} + \frac{1}{n} = d(k,m) + d(m,n) \leq (1+\varepsilon)\big(d(k,m) + d(m,n)\big).$$

Finalmente, si $k, m, n \geq 2$ se tiene

$$\begin{aligned} d(k,n) &= \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\ &\leq (1+\varepsilon)\Big(\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\Big) \\ &= (1+\varepsilon)\big(d(k,m) + d(m,n)\big). \end{aligned}$$

Luego, podemos concluir que para todo $k, n, m \in \mathbb{N}_0$

$$d(k,n) \leq (1+\varepsilon)\big(d(k,m) + d(m,n)\big),$$

y entonces la función $d$ definida para cada $\varepsilon > 0$ es una casi-métrica. Por lo tanto $(\mathbb{N}_0, d)$ es un espacio casi-métrico.

Con el objeto de ver que las bolas de este espacio en general no son conjuntos abiertos, notemos que

$$B\left(0, 1 + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{n \in \mathbb{N}_0 : d(0,n) < 1 + \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} = \{0, 1\}.$$

Sin embargo, para el elemento 1 de la bola no existe $r > 0$ tal que $B(1, r) \subset B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$. En efecto, como

$$d(1, n) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } n = 0; \\ 0\,, & \text{si } n = 1; \\ \frac{1}{n}\,, & \text{si } n \geq 2, \end{cases}$$

se tiene que $B(1, r) = \left\{n \in \mathbb{N} : n \geq \lceil \frac{1}{r} \rceil\right\}$ contiene infinitos números naturales. Luego $B\left(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ es una bola del espacio casi-métrico $(\mathbb{N}_0, d)$ que no es un conjunto abierto.

## 1.2. Teorema de Macías y Segovia

En los espacios casi-métricos la propiedad de que las bolas sean conjuntos abiertos es importante para diversas aplicaciones en el análisis; sin embargo hemos visto que esto no siempre vale. El siguiente teorema fue probado por Macías y Segovia, haciendo un gran aporte en esta dirección. Recordemos que en el Lema 1.1 probamos que si dos casi-métricas $d$ y $d'$ son equivalentes, las topologías inducidas por $d$ y $d'$ son la misma.

Teorema 1.1 ([**MS79**, Theorem 2]). *Para $(\mathbb{X}, d)$ un espacio casi-métrico existe una casi-métrica $d'$ en $\mathbb{X}$ tal que $d'$ es equivalente a $d$ y las bolas de la casi-métrica $d'$ son conjuntos abiertos en la topología inducida por $d'$.*

Para la prueba del Teorema 1.1 los autores definen la familia de conjuntos $U_n = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} : d(x, y) < b^{-n}\}$, con $b = 3K^2$ y $n \in \mathbb{Z}$ y dicen usar un teorema de metrización de espacios uniformes para obtener la existencia de una métrica $\rho$ definida en $\mathbb{X}$ tal que se satisfaga $U_n \subset \{(x, y) : \rho(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Al no haber una referencia exacta, nos basamos en un lema de metrización dado por [**Kel75**], que si bien no podemos usarlo en forma directa, nos permitirá obtener el resultado necesario para la demostración del Teorema 1.1. Definimos primero el concepto de pseudo-métrica.

Definición 1.6. Dado un conjunto $\mathbb{X}$, se dice que una función $\rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ es una **pseudo-métrica** si para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$ se cumplen

(P1) $\rho(x, y) \geq 0$.
(P2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
(P3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$.

El par $(\mathbb{X}, \rho)$ es denominado **espacio pseudo-métrico**.

Notar que en un espacio pseudo-métrico $(\mathbb{X}, \rho)$, según la propiedad (P1), podrían existir $x, y \in \mathbb{X}$ distintos tales que $\rho(x, y) = 0$, con lo cual $\rho$ no satisfaría (CM1) y podría no ser una métrica.

En virtud del siguiente lema, establecemos la siguiente notación: para cada $n \in \mathbb{N}$, diremos que $U_n \circ U_n \circ U_n \subset U_{n-1}$ si al tomar $(x,y),(y,z),(z,w) \in U_n$, esto implica que $(x,w) \in U_{n-1}$.

Lema 1.2 ([**Kel75**, Lemma 12, p. 185]). *Sea $\mathbb{X}$ un conjunto y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ tales que $U_0 = \mathbb{X}\times\mathbb{X}$, cada $U_n$ contiene a la diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{X}\}$ y $U_n \circ U_n \circ U_n \subset U_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego existe una función real no negativa $\rho$ en $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ tal que*

(i) *$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ para todo $x,y,z \in \mathbb{X}$;*
(ii) *$U_n \subset \{(x,y) : \rho(x,y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

*Si además cada $U_n$ es simétrico (esto es, si $(x,y) \in U_n$, entonces $(y,x) \in U_n$), entonces existe una pseudo-métrica $\rho$ que satisface la condición (ii).*

Observemos que la familia $U_n = \{(x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{X} : d(x,y) < b^{-n}\}$, con $b = 3K^2$ y $n \in \mathbb{Z}$ no satisface todas las hipótesis del Lema 1.2, dado que se encuentra indexada en los números enteros y el conjunto $U_0 = \{(x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{X} : d(x,y) < 1\}$ no necesariamente coincide con $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$. Con este problema en mente damos el siguiente resultado que se obtuvo adaptando la demostración del Lema 1.2 para esta familia de conjuntos, obteniendo además que la función $\rho$ es una métrica en $\mathbb{X}$.

Lema 1.3. *Sea $(\mathbb{X},d)$ un espacio casi-métrico con constante triangular $K$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $U_n = \{(x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{X} : d(x,y) < b^{-n}\}$, con $b = 3K^2$. Luego existe una métrica $\rho$ definida en $\mathbb{X}$ tal que para todo $n$,*

$$U_n \subset \{(x,y) : \rho(x,y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}.$$

Demostración. Sea $f : \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } b^{-n} \le d(x,y) < b^{-(n-1)}, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Notar que $f$ está bien definida para todo $(x,y)$, pues $d$ es una casi-métrica y por lo tanto satisface la propiedad (CM1). Sea $\rho : \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$\rho(x,y) = \inf_{\ell\in\mathbb{N}_0, \{x_i\}_{i=0}^{\ell+1}} \sum_{i=0}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}),$$

donde el ínfimo está tomado sobre todas las sucesiones finitas $\{x_i\}$ de longitud $\ell + 2$ que unen $x$ con $y$, es decir $x_0 = x$, $x_{\ell+1} = y$ y $x_i$ con $i = 1,\dots,\ell$, elementos de $\mathbb{X}$ no necesariamente distintos.

Claramente $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, porque $f(x,y) = f(y,x)$, entonces se satisface (CM2). Además, $\rho(x,y) \ge 0$ puesto que $f(x,y) \ge 0$. Por otro lado, si $x = y$, $f(x,y) = 0$, y por ser $\rho$ el ínfimo de números no negativos, debe ser $\rho(x,y) = 0$. Para completar la demostración de (CM1), sean $x, y \in \mathbb{X}$ tales que $\rho(x,y) = 0$. Luego, por ser un ínfimo, dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $\ell \in \mathbb{N}_0$ y una sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\ell+1}$, con $x_0 = x$ y $x_{\ell+1} = y$ tales que

$$\rho(x,y) \leq \sum_{i=0}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon. \tag{6}$$

Podemos suponer que para cada $i = 0, \ldots, \ell$, $x_i \neq x_{i+1}$; caso contrario, podríamos quitar al elemento $x_{i+1}$ de la sucesión y (6) se seguiría satisfaciendo para la nueva sucesión de longitud $\ell + 1$. De esto y de la definición de $f$ vemos que $f(x_i, x_{i+1}) = 2^{-n_i}$. Y como $\varepsilon < 1$ entonces debe ser $n_i \in \mathbb{N}$, para todo $i = 0, \ldots, \ell$. Aplicando $\ell + 1$ veces la propiedad (CM3) para $d$ y recordando que $2 < b = 3K^2$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq K^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} d(x_i, x_{i+1}) \\ &< K^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} b^{-(n_i-1)} \\ &< 2K^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} 2^{-n_i} \\ &= 2K^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}) \\ &< 2K^{\ell+1}\varepsilon, \end{aligned}$$

por lo que se tiene $d(x,y) < 2K^{\ell+1}\varepsilon$ para cada $0 < \varepsilon < 1$. Luego $d(x,y) = 0$ y por ser $d$ una casi-métrica debe ser $x = y$, lo que prueba que $\rho$ satisface (CM1).

Para ver que se cumple (CM3) sean $x, y, z \in \mathbb{X}$. Notemos primero que por definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ existen $k, m \in \mathbb{N}_0$ y dos sucesiones de longitudes $k + 2$ y $m + 2$ que unen $x$ con $z$ y $z$ con $y$, respectivamente: $x = z_0, \ldots, z_{k+1} = z$ y $z = y_0, \ldots, y_{m+1} = y$ tales que

$$\sum_{i=0}^{k} f(z_i, z_{i+1}) < \rho(x,z) + \varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{m} f(y_i, y_{i+1}) < \rho(z,y) + \varepsilon.$$

Luego, tomando $\ell = k+m+1$ y llamando $\{x_i\}_{i=0}^{\ell+1}$ a la sucesión formada por los puntos $\{z_0, \ldots, z_{k+1}, y_1, \ldots, y_{m+1}\}$, se tiene

$$\rho(x,y) \leq \sum_{i=0}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}) < \rho(x,z) + \rho(z,y) + 2\varepsilon.$$

Como esto es válido para cada $\varepsilon > 0$ entonces $\rho$ satisface (CM3) con $K = 1$ y por lo tanto es una métrica.

Se demostrará a continuación que para $n \in \mathbb{Z}$,

$$U_n \subset \{(x, y) \,:\, \rho(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}.$$

Para la primera inclusión sea $(x, y) \in U_n$, esto es $d(x, y) < b^{-n}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Si $x = y$ entonces $\rho(x, y) = 0$ por lo que $\rho(x, y) < 2^{-n}$ para todo $n$. Si no, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b^{-k} \leq d(x, y) < b^{-(k-1)}$, y entonces $f(x, y) = 2^{-k}$. Además, dado que $k$ era el mínimo entero tal que $d(x, y) < b^{-(k-1)}$, se tiene $b^{-(k-1)} \leq b^{-n}$, y luego $-(k-1) \leq -n$ por ser $b \geq 1$. Por otro lado, $\rho(x, y) \leq f(x, y) = 2^{-k}$ y entonces se sigue que $\rho(x, y) < 2^{-n}$ ya que $-(k-1) \leq -n$ implica $2^{-(k-1)} \leq 2^{-n}$. Por lo tanto se tiene $U_n \subset \{(x, y) \,:\, \rho(x, y) < 2^{-n}\}$.

Para probar la segunda inclusión supongamos primero que para toda sucesión de longitud $\ell + 2 \in \mathbb{N}_0$ que une a $x$ con $y$, esto es, $x = x_0, \ldots, x_{\ell+1} = y$, hemos probado que es válida la desigualdad

$$f(x, y) \leq 2 \sum_{i=0}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}). \tag{7}$$

Luego, si $\rho(x, y) < 2^{-n}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, por definición de $\rho$ se tiene que $f(x, y) < 2^{-(n-1)}$ y, por definición de $f$, debe ser $f(x, y) \leq 2^{-n}$. Así, nuevamente por definición de $f$ es $d(x, y) < b^{-(n-1)}$ y entonces $(x, y) \in U_{n-1}$. Notar que el caso $x = y$ ya fue considerado, pues $U_n$ incluye a la diagonal para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La demostración de (7) se hará por inducción sobre la cantidad de puntos intermedios de las sucesiones que unen a $x$ con $y$, es decir, sobre $\ell$. Notar que si $x = y$ la desigualdad se cumple trivialmente. Sean $x, y \in \mathbb{X}$. El paso base, cuando $\ell = 0$, es trivial debido a que la única sucesión posible de longitud 2 es $x_0 = x, x_1 = y$, y así

$$f(x, y) \leq 2f(x, y) = 2f(x_0, x_1).$$

Dado $\ell \in \mathbb{N}$, supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $k < \ell$, y cada sucesión de longitud $k + 2$ se tiene

$$f(x, y) \leq 2 \sum_{i=0}^{k} f(x_i, x_{i+1}),$$

y veamos que la desigualdad anterior se cumple para $\ell$. Consideremos $a = \sum_{i=0}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}) > 0$ y sea $0 \leq j < \ell$ el máximo entero tal que

$$\sum_{i=0}^{j-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}.$$

Luego $\sum_{i=0}^{j} f(x_i, x_{i+1}) > \frac{a}{2}$ y así

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=0}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{j} f(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=j+1}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}) \\ &> \frac{a}{2} + \sum_{i=j+1}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}), \end{aligned}$$

por lo que

$$\sum_{i=j+1}^{\ell} f(x_i, x_{i+1}) < \frac{a}{2}.$$

Se tiene entonces $f(x_0, x_j) \leq 2\frac{a}{2} = a$ y $f(x_{j+1}, x_{\ell+1}) < 2\frac{a}{2} = a$ por hipótesis inductiva. Además $f(x_j, x_{j+1}) \leq a$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-(m+1)} \leq a < 2^{-m}$. Así $f(x_0, x_j), f(x_j, x_{j+1}), f(x_{j+1}, x_{\ell+1}) < 2^{-m}$, y entonces por la definición de $f$, y el decrecimiento de la función exponencial, obtenemos que $(x_0, x_j), (x_j, x_{j+1})$ y $(x_{j+1}, x_{\ell+1})$ son elementos de $U_m$. Si supiéramos que los conjuntos $U_m$ satisfacen la condición $U_m \circ U_m \circ U_m \subset U_{m-1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, entonces $(x_0, x_{\ell+1}) \in U_{m-1}$, con lo cual $f(x_0, x_{\ell+1}) \leq 2^{-m} \leq 2a$, lo que probaría (7).

Veamos ahora que vale la inclusión anterior. Para ello consideremos los pares $(x, y), (y, z), (z, w) \in U_m$. Recordando que $K \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x, w) &\leq K\big(d(x, y) + d(y, w)\big) \\ &\leq K\big(d(x, y) + K\big(d(y, z) + d(z, w)\big)\big) \\ &< K\big(3^{-m}K^{-2m} + K\big(3^{-m}K^{-2m} + 3^{-m}K^{-2m}\big)\big) \\ &= 3^{-m}K^{-(2m-1)} + 2 \cdot 3^{-m}K^{-2(m-1)} \\ &\leq 3^{-m}\left(K^{-2(m-1)} + 2K^{-2(m-1)}\right) \\ &= 3^{-(m-1)}K^{-2(m-1)} \\ &= b^{-(m-1)}, \end{aligned}$$

entonces $(x, w) \in U_{m-1}$, como queríamos probar. □

Demostración del Teorema 1.1. Si $\mathbb{X}$ es un conjunto unitario entonces definiendo $d'$ idénticamente nula se tiene el resultado. Consideramos entonces $\mathbb{X}$ no unitario.

Sea $b = 3K^2$, donde $K$ representa la constante triangular del espacio casi-métrico $(\mathbb{X}, d)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se definen los conjuntos

$$U_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \,:\, d(x, y) < b^{-n}\right\}.$$

Por el Lema 1.3 existe una métrica $\rho$ definida sobre $\mathbb{X}$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$U_n \subset \left\{(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \,:\, \rho(x,y) < 2^{-n}\right\} \subset U_{n-1}. \tag{8}$$

Sean $x, y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$. Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $b^{-(n+1)} \leq d(x,y) < b^{-n}$, es decir $(x,y) \in U_n$ y por (8), $\rho(x,y) < 2^{-n}$. Tomando $\alpha = \log_b 2$, $\alpha \in (0,1)$ y se tiene

$$\rho(x,y) < 2^{-n} = b^{-\alpha n} = b^{\alpha} b^{-(n+1)\alpha} \leq 2d(x,y)^{\alpha}.$$

Sea ahora $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2^{-(m+1)} \leq \rho(x,y) < 2^{-m}.$$

Entonces de (8) se tiene que $(x,y) \in U_{m-1}$, y así

$$d(x,y) < b^{-(m-1)},$$

lo que implica que

$$d(x,y)^{\alpha} < b^{2\alpha-\alpha} \left(b^{\alpha}\right)^{-m} = \left(b^{\alpha}\right)^{2} b^{-\alpha} \left(b^{\alpha}\right)^{-m} = 4 \cdot 2^{-(m+1)} \leq 4\rho(x,y).$$

Hasta aquí se ha mostrado que para $x, y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$,

$$\frac{1}{2}\rho(x,y) \leq d(x,y)^{\alpha} \leq 4\rho(x,y).$$

Si $x = y$ notar que la equivalencia anterior se cumple trivialmente.

Definimos ahora $d'(x,y) = \rho(x,y)^{\frac{1}{\alpha}}$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$. Por lo visto en el Ejemplo 1.6, $d'$ es una casi-métrica, ya que $\frac{1}{\alpha} > 1$, y se tiene entonces para todo $x, y \in \mathbb{X}$,

$$2^{-\frac{1}{\alpha}} d'(x,y) \leq d(x,y) \leq 4^{\frac{1}{\alpha}} d'(x,y).$$

Por lo tanto las casi-métricas $d$ y $d'$ son equivalentes, puesto que $\alpha$ solo depende de la constante $K$. Además, las bolas en $(\mathbb{X}, d')$ son conjuntos abiertos por lo visto en el Ejemplo 1.6. $\square$

Capítulo 2

# Espacios de tipo homogéneo

En este capítulo equipamos al espacio casi-métrico $(\mathbb{X}, d)$ con una medida con el objeto de obtener un espacio de tipo homogéneo. Una clase particular son los espacios $\alpha$-Ahlfors que se asemejan, en cierto sentido, al espacio euclídeo con la métrica y medidas usuales. Veremos finalmente un teorema dado por Macías y Segovia en [**MS79**], el cual nos garantiza que podemos cambiar la casi-métrica por otra equivalente de tal forma que el nuevo espacio sea 1-Ahlfors.

## 2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1. Una medida $\mu$ definida sobre una $\sigma$-álgebra que contiene a los borelianos del espacio casi-métrico $(\mathbb{X}, d)$ y a las bolas $B(x,r)$ donde $x \in \mathbb{X}$ y $r > 0$ decimos que satisface la **propiedad de duplicación** o que **es doblante** con respecto a la casi-métrica $d$ si las bolas con respecto a $d$ son conjuntos medibles y existe una constante $A > 1$, llamada **constante de duplicación**, tal que para todo $x \in \mathbb{X}$ y $r > 0$,

$$0 < \mu\big(B(x, 2r)\big) \leq A\mu\big(B(x,r)\big) < \infty.$$

Cuando $\mu$ satisface la propiedad de duplicación se define al espacio $(\mathbb{X}, d, \mu)$ como **espacio de tipo homogéneo**.

Observación 2.1. En este trabajo consideraremos espacios de tipo homogéneo tales que $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Estos espacios se denominan **no atómicos**.

Ejemplo 2.1. La medida de Lebesgue $\lambda$ en $\mathbb{R}^n$ es doblante con respecto a la métrica usual. En efecto

$$\lambda\big(B(x,2r)\big) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} 2^n r^n = 2^n \lambda\big(B(x,r)\big),$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ es la función Gamma, la cual está bien definida para $z > 0$. Entonces $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \lambda)$ es un espacio de tipo homogéneo con constante de duplicación $A = 2^n$.

Ejemplo 2.2. En el intervalo $[0,1]$, la medida $d\mu(t) = t^{-\frac{1}{2}} dt$ es doblante, con lo cual $\big([0,1], |\cdot|, \mu\big)$ es un espacio de tipo homogéneo. Para $0 \leq a < b \leq 1$ sabemos que vale la siguiente igualdad

$$\mu\big((a,b)\big) = \int_a^b t^{-1/2}\, dt = 2\big(\sqrt{b} - \sqrt{a}\big). \tag{9}$$

Para $x \in [0,1]$ y $r > 0$, probaremos que existe una constante $A \geq 1$ independiente de $x$ y $r$ tal que

$$\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} \leq A. \tag{10}$$

- Si $B(x,2r)\cap[0,1] = B(x,2r)$, llamamos $(a,b) = B(x,2r)$, es decir $x = \frac{a+b}{2}$ y $2r = \frac{b-a}{2}$. Luego, si $(a',b') = B(x,r)$, se tiene

  $$a' = x - r = \frac{3a+b}{4} \quad \text{y} \quad b' = x + r = \frac{3b+a}{4}.$$

  Entonces, por (9)

  $$\begin{aligned}
  \frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} &= \frac{2\big(\sqrt{b}-\sqrt{a}\big)}{2\left(\sqrt{\frac{3b+a}{4}} - \sqrt{\frac{3a+b}{4}}\right)} \\
  &= \frac{2\big(\sqrt{b}-\sqrt{a}\big)}{\sqrt{3b+a}-\sqrt{3a+b}} \\
  &= \frac{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{3b+a-3a-b}\left(\sqrt{3b+a}+\sqrt{3a+b}\right) \\
  &= \sqrt{b}\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\frac{\left(\sqrt{3b+a}+\sqrt{3a+b}\right)}{b-a} \\
  &\leq \sqrt{b}\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\frac{4\sqrt{b}}{b-a} \\
  &= \frac{4\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{1-\frac{a}{b}} \\
  &= \frac{4}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}} \\
  &\leq 4.
  \end{aligned}$$

- Si $B(x,2r)\cap[0,1] = [0,1]$ tenemos $2r > \frac{1}{2}$ y $\mu(B(x,2r)) = 2$.

  En el caso en que también $B(x,r)\cap[0,1] = [0,1]$, luego $\mu(B(x,r)) = 2$ y se tiene (10) con $A = 1$.

  Por otro lado cuando $B(x,r)\cap[0,1] = B(x,r)$, denotando con $a = x-r$ y $b = x+r$, tenemos que, como $b = a+2r$ entonces $b > a+\frac{1}{2}$ y dado que $0 \leq a < b \leq 1$, por (9) se tiene

  $$\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} = \frac{2}{2\big(\sqrt{b}-\sqrt{a}\big)} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+a}-\sqrt{a}} \leq 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right),$$

  donde, para la última desigualdad se multiplicó y dividió por $\sqrt{\frac{1}{2}+a}+\sqrt{a}$ y se usó que $a \leq 1$.

Ahora, si $B(x,r)\cap[0,1]=[0,b)$, con $b=x+r\leq 1$, entonces, como $r>\frac{1}{4}$ y $x\geq 0$, tenemos

$$\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)}=\frac{1}{\sqrt{x+r}}\leq 2.$$

Finalmente, si $B(x,r)\cap[0,1]=(a,1]$, con $a=x-r\geq 0$, entonces, dado que $r>\frac{1}{4}$ y $x\leq 1$

$$\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)}=\frac{1}{1-\sqrt{x-r}}\leq\frac{1}{1-\sqrt{\frac{3}{4}}}.$$

- Para $B(x,2r)\cap[0,1]=[0,x+2r)$ obtenemos $x-2r<0$, y nuevamente por (9) se tiene $\mu(B(x,2r))=2\sqrt{x+2r}$.

  Si $B(x,r)\cap[0,1]=[0,x+r)$ entonces

$$\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)}=\frac{2\sqrt{x+2r}}{2\sqrt{x+r}}\leq\frac{\sqrt{4r}}{\sqrt{r}}=\sqrt{2},$$

donde usamos que $0\leq x<2r$.

Cuando $B(x,r)\cap[0,1]=(x-r,x+r)$ teniendo en cuenta que $r<x<2r$ podemos estimar

$$\begin{aligned}\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)}&=\frac{2\sqrt{x+2r}}{2\Big(\sqrt{x+r}-\sqrt{x-r}\Big)}\\&=\frac{\sqrt{x+2r}}{\sqrt{x+r}-\sqrt{x-r}}\\&<\frac{\sqrt{4r}}{\sqrt{2r}-\sqrt{r}}\\&=\frac{2}{\sqrt{2}-1}.\end{aligned}$$

- Para $B(x,2r)\cap[0,1]=(x-2r,1]$ tenemos $1<x+2r$ y $0<2r\leq\frac{1}{2}$, por (9) es $\mu(B(x,2r))=2(1-\sqrt{x-2r})$.

  Si $B(x,r)\cap[0,1]=(x-r,1]$ entonces, como $1-r<x\leq 1$

$$\begin{aligned}\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)}&=\frac{2\big(1-\sqrt{x-2r}\big)}{2\Big(1-\sqrt{x-r}\Big)}\\&\leq\frac{1-\sqrt{1-3r}}{1-\sqrt{1-r}}\\&=\frac{3\big(1+\sqrt{1-r}\big)}{1+\sqrt{1-3r}}\\&<\frac{6}{1+\sqrt{1-\frac{3}{4}}},\end{aligned}$$

$$= 4.$$

Finalmente, si $B(x,r) \cap [0,1] = (x-r, x+r)$, entonces, usando que $x+r < 1 < x+2r$ y que $r \leq \frac{1}{4}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\mu\big(B(x,2r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} &= \frac{2\big(1-\sqrt{x-2r}\big)}{2\big(\sqrt{x+r}-\sqrt{x-r}\big)} \\
&< \frac{1-\sqrt{1-4r}}{\sqrt{1-r}-\sqrt{1-2r}} \\
&= \frac{1-(1-4r)}{(1-r)-(1-2r)} \, \frac{\sqrt{1-r}+\sqrt{1-2r}}{1+\sqrt{1-4r}} \\
&< \frac{4r}{r} \cdot 2 \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Como en todos los casos fue posible hallar una constante $A \geq 1$ que satisfaga (10), la medida $d\mu(t) = t^{-\frac{1}{2}}dt$ es doblante, como queríamos probar.

La siguiente proposición es una propiedad importante que cumplen los espacios de tipo homogéneo.

PROPOSICIÓN 2.1. *Un espacio de tipo homogéneo* $(\mathbb{X}, d, \mu)$ *es acotado si y sólo si* $\mu(\mathbb{X}) < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Si $(\mathbb{X}, d, \mu)$ es acotado luego existe $r > 0$ tal que $\mathbb{X} = B(x,r)$ y por ser $\mu$ doblante, $\mu(\mathbb{X}) = \mu(B(x,r)) < \infty$.

Para probar el recíproco supongamos que $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ pero $\mathbb{X}$ no es acotado. Sea $x \in \mathbb{X}$ fijo. Como $\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x,n)$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\big(\mathbb{X}\backslash B(x,n)\big) = \mu(\mathbb{X}) - \mu\big(B(x,n)\big)$$

tiende a cero cuando $n$ tiende a infinito.

Por ser $\mathbb{X}$ no acotado entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{X}$ tal que $x_n \notin B(x, 2n)$. Además se tiene

$$B\big(x, \tfrac{n}{K}\big) \cap B\big(x_n, \tfrac{d(x,x_n)}{2K}\big) = \varnothing, \tag{11}$$

pues si $y$ perteneciera a la intersección anterior entonces

$$d(x,x_n) \leq K\big(d(x,y) + d(y,x_n)\big) < n + \frac{d(x,x_n)}{2},$$

y como $x_n \notin B(x,2n)$ entonces $n \leq \frac{d(x,x_n)}{2}$. Así, $d(x,x_n) < d(x,x_n)$, lo cual es un absurdo que vino de suponer que la intersección era no vacía.

Por otro lado

$$B(x,n) \subset B\big(x_n, 2Kd(x,x_n)\big), \tag{12}$$

dado que si $y \in B(x,n)$ y $x_n \notin B(x,2n)$

$$\begin{aligned} d(y,x_n) &\leq K\big(d(y,x)+d(x,x_n)\big) \\ &< Kn + Kd(x,x_n) \\ &< 2Kd(x,x_n). \end{aligned}$$

Finalmente, usando lo supuesto para $\mathbb{X}$, (12), la propiedad de duplicación para $\mu$ y (11) se tiene

$$\begin{aligned} 0 < \mu(\mathbb{X}) &= \lim_{n\to\infty} \mu\big(B(x,n)\big) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \mu\Big(B\big(x_n, 2Kd(x,x_n)\big)\Big) \\ &\leq A^m \limsup_{n\to\infty} \mu\Big(B\big(x_n, \tfrac{d(x,x_n)}{2K}\big)\Big) \\ &\leq A^m \limsup_{n\to\infty} \mu\Big(\mathbb{X}\backslash B\big(x, \tfrac{n}{K}\big)\Big), \end{aligned}$$

con $m = \big\lceil \log_2(4K^2)\big\rceil$. Pero el último término es cero, lo que es un absurdo. Luego $\mathbb{X}$ debe ser acotado. $\square$

Observación 2.2. Si $(\mathbb{X},d,\mu)$ es un espacio de tipo homogéneo y $d'$ es tal que $d \sim d'$ entonces $(\mathbb{X},d',\mu)$ también es un espacio de tipo homogéneo. Para probarlo debemos ver que si una medida es doblante con respecto a $d$ entonces lo es con respecto a $d'$. De la Definición 1.5 y el Lema 1.1 existen constantes positivas $c_1$ y $c_2$ tales que las inclusiones $B_d(x,r) \subset B_{d'}\big(x, \frac{r}{c_1}\big)$ y $B_{d'}(x,r) \subset B_d(x,c_2 r)$ son válidas para todo $x \in \mathbb{X}$ y todo $r > 0$.

Por otro lado, como $\mu$ cumple con la propiedad de duplicación para las bolas construidas con la casi-métrica $d$, se tiene

$$\mu(B_{d'}(x,r)) \leq \mu(B_d(x,c_2 r)) < \infty,$$

y

$$0 < \mu(B_d(x,c_1 r)) \leq \mu(B_{d'}(x,r)).$$

Además

$$\begin{aligned} \mu\big(B_{d'}(x,2r)\big) &\leq \mu\big(B_d(x,2c_2 r)\big) \\ &= \mu\Big(B_d\Big(x, 2\frac{c_2}{c_1}c_1 r\Big)\Big) \\ &\leq \mu\big(B_d\left(x, 2^k c_1 r\right)\big) \\ &\leq A^k \mu\big(B_d(x,c_1 r)\big) \\ &\leq A^k \mu\big(B_{d'}(x,r)\big), \end{aligned}$$

donde $A$ es la constante de duplicación del espacio $(\mathbb{X},d,\mu)$ y $k \in \mathbb{N}$ es tal que $2^{k-1} < 2\frac{c_2}{c_1} \leq 2^k$; más precisamente, $k = \big\lceil \log_2\left(2c_2/c_1\right)\big\rceil$. Luego $\mu$ cumple con la propiedad de duplicación para las bolas de la casi-métrica $d'$ como queríamos probar.

Veremos a continuación una propiedad importante que cumplen los espacios de tipo homogéneo. Antes daremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2. Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio casi-métrico. Diremos que $(\mathbb{X}, d)$ tiene la **propiedad de homogeneidad débil (PHD)** si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{X}$ y $r > 0$, la bola $B(x, r)$ contiene a lo sumo $N$ puntos $\frac{r}{2}$–dispersos; esto es, existen a lo sumo $N$ puntos $x_1, x_2, \ldots, x_N \in B(x, r)$ tales que $d(x_i, x_j) \geq \frac{r}{2}$, para cada $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$.

PROPOSICIÓN 2.2 ([**CW71**, p. 67]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo. Luego el mismo cumple con la PHD.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in \mathbb{X}$, $r > 0$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_N$ puntos $\frac{r}{2}$–dispersos en $B(x, r)$. Notemos primero que las bolas $B\big(x_i, \frac{r}{4K}\big)$ son disjuntas para todo $x_i$ del conjunto $\frac{r}{2}$–disperso, pues si existiera un punto $y \in B\big(x_i, \frac{r}{4K}\big) \cap B\big(x_j, \frac{r}{4K}\big)$, entonces

$$d(x_i, x_j) \leq K\big(d(x_i, y) + d(y, x_j)\big) < \frac{r}{2}\,,$$

lo cual no puede pasar.

Por otro lado, dado $y \in B\big(x_i, \frac{r}{4K}\big)$,

$$d(x, y) \leq K\big(d(x, x_i) + d(x_i, y)\big) < Kr + K\tfrac{r}{4K} = r\Big(K + \tfrac{1}{4}\Big).$$

Del mismo modo se obtiene $B\big(x, r(K + \frac{1}{4})\big) \subset B\Big(x_i, Kr\left(K + \frac{5}{4}\right)\Big)$, pues si $y \in B\big(x, r(K + \frac{1}{4})\big)$ entonces

$$d(x_i, y) \leq K\big(d(x_i, x) + d(x, y)\big) < Kr + Kr\left(K + \tfrac{1}{4}\right) = Kr\left(K + \tfrac{5}{4}\right).$$

Tomando $k = \left\lceil \log_2\left(4K^2\left(K + \frac{5}{4}\right)\right) \right\rceil$ se tiene

$$\mu\Big(B\Big(x_i, Kr\left(K + \tfrac{5}{4}\right)\Big)\Big) \leq \mu\left(B\big(x_i, 2^k\tfrac{r}{4K}\big)\right),$$

y por la duplicación de $\mu$

$$\mu\Big(B\Big(x, r\left(K + \tfrac{1}{4}\right)\Big)\Big) \leq \mu\Big(B\Big(x_i, Kr\left(K + \tfrac{5}{4}\right)\Big)\Big) \leq A^k\mu\left(B\big(x_i, \tfrac{r}{4K}\big)\right).$$

Sumando sobre todos los $i = 1, \ldots, N$ y recordando que las bolas $B(x_i, \frac{r}{4K})$ son disjuntas dos a dos

$$\begin{aligned}
\frac{N}{A^k}\,\mu\Big(B\Big(x, r\big(K + \tfrac{1}{4}\big)\Big)\Big) &\leq \sum_{i=1}^{N}\mu\left(B\big(x_i, \tfrac{r}{4K}\big)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} B\big(x_i, \tfrac{r}{4K}\big)\right) \\
&\leq \mu\Big(B\Big(x, r\big(K + \tfrac{1}{4}\big)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Luego debe ser $N \leq A^k$, es decir, existen finitos puntos $x_i \in \mathbb{X}$ tales que $d(x_i, x_j) \geq \frac{r}{2}$ y la constante sólo depende de las constantes geométricas del espacio. $\square$

Observación 2.3. Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo que satisface la PHD con constante $N$. Para $F \subset \mathbb{X}$ acotado existe un cubrimiento finito $\{B(x_i, \frac{r}{2})\}_{i=1}^{N}$ de $F$, para algún $r > 0$. En efecto, como $F$ es acotado, existe $r > 0$ tal que $F \subset B(x, r)$, para algún $x \in \mathbb{X}$. De la PHD para $\mathbb{X}$ se tiene que en $B(x, r)$ hay a lo sumo $N$ puntos $\frac{r}{2}$–dispersos $x_1, \ldots, x_N$. Por lo tanto, si $y \in B(x, r)$ es tal que $y \notin \{x_1, \ldots, x_N\}$, existe $1 \leq i \leq N$ tal que $d(y, x_i) < \frac{r}{2}$ y así se tiene $y \in B(x_i, \frac{r}{2})$. Entonces $F \subset B(x, r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{r}{2})$, como queríamos probar.

Observación 2.4. Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo. Entonces para todo $x \in \mathbb{X}$ y $r > 0$, la bola $B(x, r)$ contiene a lo sumo $N_\rho$ puntos $\rho$–dispersos para cada $0 < \rho < r$. La demostración de esta propiedad es análoga a la de la Proposición 2.2 tomando $\rho$ en lugar de $\frac{r}{2}$ como el factor en la dispersión inicial. En consecuencia se tiene que para todo $F \subset \mathbb{X}$ acotado y $0 < \rho < r$, existe un cubrimiento finito $\{B(x_i, \rho)\}_{i=1}^{N_\rho}$ de $F$.

En la siguiente proposición veremos un lema de cubrimiento válido en el contexto de los espacios casi-métricos vistos en el Capítulo 1.

Proposición 2.3 ([**CW71**, p. 69]). *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio casi-métrico que satisface la PHD, $E \subset \mathbb{X}$ acotado y $\{B(x, r(x))\}$ un cubrimiento por bolas de $E$. Entonces existe una sucesión a lo sumo numerable de bolas disjuntas $\{B(x_i, r(x_i))\}$, tales que la familia $\{B(x_i, Cr(x_i))\}$ con $C > 4K$, cubre a $E$.*

Demostración. Como $E \subset \mathbb{X}$ es acotado podemos suponer que $\sup_{x \in E} r(x) < \infty$. En efecto, si no fuera así existirá una bola $B(x, r(x))$ que contiene a $E$ y el resultado queda probado.

Supongamos entonces que $\sup_{x \in E} r(x) < \infty$. Por definición de supremo, existe $x_1 \in E$ tal que $r(x_1) > \frac{1}{2} \sup_{x \in E} r(x)$ y denotemos por $E_0 = E$ y $E_1 = E \backslash B(x_1, Cr(x_1))$, con $C > 1$ a determinar.

Si $E_1 \neq \varnothing$, como $E_1 \subset E$ se tiene que $\sup_{x \in E_1} r(x) < \infty$. Luego existe $x_2 \in E_1$ tal que $r(x_2) > \frac{1}{2} \sup_{x \in E_1} r(x)$ y definimos

$$E_2 = E \backslash \big(B\big(x_1, Cr(x_1)\big) \cup B\big(x_2, Cr(x_2)\big)\big).$$

Con este procedimiento podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ a lo sumo numerable con las siguientes propiedades

$$x_n \in E_n := E \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} B\big(x_i, Cr(x_i)\big) \quad \text{y} \quad r(x_n) > \frac{1}{2} \sup_{x \in E_{n-1}} r(x).$$

Veamos que la familia $\{B(x_i, r(x_i))\}$ es disjunta. Consideremos $y \in B(x_i, r(x_i)) \cap B(x_j, r(x_j))$, con $i < j$. Luego $x_j \in E_j \subset E_i \subset E_{i-1}$ y

$\frac{1}{2}r(x_j) \leq \frac{1}{2}\sup_{x\in E_j} r(x) \leq \frac{1}{2}\sup_{x\in E_{i-1}} r(x) < r(x_i)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq K\big(d(x_i, y) + d(y, x_j)\big) \\ &< K\big(r(x_i) + r(x_j)\big) \\ &< K\big(r(x_i) + 2r(x_i)\big) \\ &< 3Kr(x_i). \end{aligned}$$

Así, $x_j \in B(x_i, 3Kr(x_i))$, pero por su construcción $x_j \notin B(x_i, Cr(x_i))$ y así basta tomar $C > 4K$. Luego la familia $\{B(x_n, r(x_n))\}$ es disjunta.

Para ver que la familia $\{B(x_n, Cr(x_n))\}$ es un cubrimiento de $E$, veamos las dos situaciones posibles a partir de la construcción propuesta.

- Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E_N = \varnothing$, la construcción termina en el paso $N$ y $\{B(x_n, Cr(x_n))\}_{n=1}^{N-1}$ es el cubrimiento buscado.
- Si la construcción continuara indefinidamente observemos que los radios $r(x_n)$ tienden a cero cuando $n$ tiende a infinito. En efecto, si no pasara entonces existiría $\varepsilon > 0$ e infinitas bolas de radio mayor que $\varepsilon$, disjuntas y contenidas en $B$, donde $B$ es una bola tal que $\bigcup_{x\in E} B(x, r(x)) \subset B$. Pero esto contradice la PHD que satisface el espacio $(\mathbb{X}, d)$.

  Si existiera $x \in E \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} B(x_n, Cr(x_n))$ entonces, como $r(x_n)$ tiende a cero cuando $n$ tiende a infinito, podríamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r(x) > 2r(x_{n_0})$. Pero $x \in E_n$ para todo $n$; en particular $x \in E_{n_0-1}$ y se contradice la definición de $r(x_{n_0})$. Luego $\{B(x_n, Cr(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ es el cubrimiento buscado. □

## 2.2. Espacios $\alpha$-Ahlfors

Como vimos en el Ejemplo 2.1, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \lambda)$ es un espacio de tipo homogéneo y $\lambda(B(x,r)) = c\,r^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, donde $c = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ sólo depende de $n$, es decir, dada una bola $B$, su medida es equivalente a la potencia $n$ de su radio. Esta propiedad se ve generalizada en la siguiente definición.

Definición 2.3. Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio casi-métrico. Se dice que $(\mathbb{X}, d)$ es **$\alpha$-Ahlfors con medida $\mu$** definida sobre los borelianos de $\mathbb{X}$, con $\alpha \geq 0$, si existe $c_\mu \geq 1$ tal que para todo $x \in \mathbb{X}$ y $0 < r < \mu(\mathbb{X})$,

$$c_\mu^{-1} r^\alpha \leq \mu\big(B(x,r)\big) \leq c_\mu r^\alpha.$$

Un subespacio $(F, d)$ de $(\mathbb{X}, d)$ se dice **$s$-Ahlfors con medida $\nu$**, con $0 \leq s < \alpha$, si $\nu$ es una medida de Borel con soporte en $F$ y existe $c_\nu \geq 1$ tal que para todo $x \in F$ y $0 < r < \text{diám}(F)$

$$c_\nu^{-1} r^s \leq \nu\left(B(x,r)\right) \leq c_\nu r^s,$$

donde $\text{diám}(F) = \sup\{d(x,y) : x, y \in F\}$.

Cuando no haya confusión sobre qué medida se está usando escribiremos la constante simplemente como $c$.

Notar que todo espacio $\alpha$-Ahlfors es de tipo homogéneo. Para verlo, por la Definición 2.3, basta probar la propiedad de duplicación para la medida. Para ello, definamos la constante de duplicación como la constante $A$ tal que $c\,2^\alpha = c^{-1}A$, donde $c$ es la constante dada en la Definición 2.3 para $(\mathbb{X}, d)$ con medida $\mu$, puesto que

$$\begin{aligned}0 < c^{-1}(2r)^\alpha \leq \mu\big(B(x,2r)\big) &\leq c2^\alpha r^\alpha \\ &= Ac^{-1}r^\alpha \leq A\mu\big(B(x,r)\big) \leq Acr^\alpha < \infty,\end{aligned}$$

donde la constante de duplicación depende de $\alpha$ y de $c$.

Sin embargo, no todo espacio de tipo homogéneo es $\alpha$-Ahlfors para algún $\alpha > 0$ como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. Como hemos visto en el Ejemplo 2.2, $([0,1], |\cdot|, \mu)$, donde $d\mu(x) = x^{-\frac{1}{2}}dx$ es un espacio de tipo homogéneo. Sin embargo, no puede ser $\alpha$-Ahlfors para ningún $\alpha > 0$ ya que dado $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mu\big(B(0,\varepsilon)\big) = \mu\big([0,\varepsilon)\big) = \int_0^\varepsilon x^{-1/2}\,dx \simeq \sqrt{\varepsilon},$$

pero

$$\begin{aligned}\mu\big(B(1,\varepsilon)\big) = \mu\big((1-\varepsilon,1]\big) &= \int_{1-\varepsilon}^1 x^{-1/2}\,dx = 2\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right) \\ &= 2\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{1-\varepsilon}} \\ &= \frac{2\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon}} \simeq \varepsilon,\end{aligned}$$

donde $a \simeq b$ si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1\,a \leq b \leq c_2\,a$.

Para ver la última equivalencia notar que como $0 < \varepsilon < 1$ entonces $1 < 1+\sqrt{1-\varepsilon} < 2$ y por lo tanto $1 < \frac{2}{1+\sqrt{1-\varepsilon}} < 2$.

Observación 2.5. Sean $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo y $F \subset \mathbb{X}$ acotado. La condición $s$-Ahlfors con medida $\nu$ para $F$ es equivalente a que la misma se satisfaga para todo $0 < r < r_0$, para algún $r_0$. En efecto, supongamos primero que $F$ es $s$-Ahlfors con medida $\nu$ y veamos que la condición se satisface para todo $0 < r < r_0$. En el caso $r_0 \leq \text{diám}(F)$ no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $\text{diám}(F) < r_0$. Si $r < \text{diám}(F)$, nuevamente no hay nada que demostrar; tomemos entonces $\text{diám}(F) < r < r_0$ y sea $x \in F$. Como $\nu(B(x,r)) = \nu(F)$, se tiene

$$\frac{\nu(F)}{r_0^s}r^s \leq \frac{\nu(F)}{r^s}r^s = \nu\big(B(x,r)\big) = \frac{\nu(F)}{\text{diám}(F)^s}\text{diám}(F)^s \leq \frac{\nu(F)}{\text{diám}(F)^s}r^s,$$

y basta tomar $c = \text{máx}\{\nu(F)\text{diám}(F)^{-s}, r_0^s\nu(F)^{-1}\}$, dado que por ser $F$ acotado, de la Proposición 2.2 se tiene $\nu(F), \text{diám}(F) < \infty$.

Veamos ahora que si la condición $s$-Ahlfors se satisface siempre que $0 < r < r_0$, para algún $r_0$, entonces $F$ es $s$-Ahlfors con medida $\nu$. En efecto, si $r < \text{diám}(F) \leq r_0$ o $0 < r < r_0 < \text{diám}(F)$, no hay nada que demostrar. Luego, supongamos $r_0 < r < \text{diám}(F)$ y $x \in F$. Como, por la Proposición 2.2, $(\mathbb{X}, d, \mu)$ satisface la PHD y $F$ es acotado, por la Observación 2.3 existe un cubrimiento finito $\{B(x_i, \frac{r_0}{2})\}_{i=1}^N$ de $F$, y luego

$$\begin{aligned}
\nu\big(B(x,r)\big) &\leq \nu(F) \\
&\leq \nu\left(\bigcup_{i=1}^{N} B\big(x_i, \tfrac{r_0}{2}\big)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \nu\Big(B\big(x_i, \tfrac{r_0}{2}\big)\Big) \\
&\leq Nc\,2^{-s} r_0^s \\
&< Nc\,2^{-s}\, r^s.
\end{aligned}$$

Además, como $r_0 < r$ se tiene

$$\begin{aligned}
\nu\big(B(x,r)\big) &\geq \nu\Big(B\Big(x, \frac{r_0}{2}\Big)\Big) \\
&\geq c^{-1}\Big(\frac{r_0}{2\,\text{diám}(F)}\Big)^s \text{diám}(F)^s \\
&> c^{-1}\Big(\frac{r_0}{2\,\text{diám}(F)}\Big)^s r^s,
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $(F, d)$ es $s$-Ahlfors con medida $\nu$ tomando como constante de la propiedad al $\text{máx}\{Nc\,2^{-s}, c\,r_0^{-s} 2^s \text{diám}(F)^s\}$.

El siguiente teorema muestra que sobre cualquier espacio de tipo homogéneo $(\mathbb{X}, d, \mu)$ se puede definir una casi-métrica que induce la misma topología que $d$ que lo haga un espacio 1-Ahlfors. Si bien el enunciado pide que las bolas con la casi-métrica original sean conjuntos abiertos, ya hemos visto en el Teorema 1.1 del Capítulo 1 que esto puede suponerse sin perder generalidad. La importancia de este resultado radica en poder aplicar resultados dados para espacios Ahlfors a espacios que no lo son inicialmente, siempre y cuando se pueda obtener una relación para el problema planteado entre ambos espacios. En esta dirección daremos una aplicación en el siguiente capítulo relacionada con el operador maximal de Hardy-Littlewood y la clase de pesos de Muckenhoupt.

TEOREMA 2.1 ([**MS79**, Theorem 3]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas obtenidas con la casi-métrica $d$ son conjuntos abiertos. Sea $\delta$ la función definida para cada $x, y \in \mathbb{X}$ como*

$$\delta(x,y) = \text{ínf}\{\mu(B) \,:\, B \text{ es una bola que contiene a } x \text{ y a } y\},$$

*si $x \neq y$ y $\delta(x,y) = 0$ si $x = y$. Luego $\delta$ es una casi-métrica en $\mathbb{X}$. Más aún, el espacio $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$ es un espacio 1-Ahlfors y las topologías inducidas por $d$ y $\delta$ coinciden.*

Demostración. Veamos primero que la función $\delta$ antes definida es, en efecto, una casi-métrica.

La condición (CM2) se satisface trivialmente. Para ver (CM1), por la definición de $\delta$ y dado que toda bola tiene medida no negativa, $\delta(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$. Para ver que $\delta(x,y) = 0$ implica $x = y$, tomemos $x \neq y$, o equivalentemente $d(x,y) > 0$. Sea $B(z,s)$ una bola que contiene a $x$ y a $y$. Luego

$$r := d(x,y) \leq K\big(d(x,z) + d(z,y)\big) \leq 2Ks,$$

y $B(x,r) \subset B(z, 3K^2 s)$, dado que si $w \in B(x,r)$ entonces

$$d(w,z) \leq K\big(d(w,x) + d(x,z)\big) \leq 2K^2 s + Ks \leq 3K^2 s.$$

Como $\mu$ es doblante con respecto a $d$ se tiene por lo anterior que

$$0 < \mu\left(B(x,r)\right) \leq \mu\left(B(z, 3K^2 s)\right) \leq C\mu\left(B(z,s)\right),$$

donde $C > 0$ depende de las constantes geométricas del espacio. Luego, como $B(z,s)$ es arbitraria, la desigualdad vale para el ínfimo de tales medidas. Con lo cual

$$0 < C^{-1}\mu\left(B(x,r)\right) \leq \delta(x,y),$$

y con esto se tiene que $\delta$ satisface (CM1).

Para ver (CM3) sean $x, y, z \in \mathbb{X}$ y $B(u,r)$, $B(v,s)$ dos bolas tales que $x, z \in B(u,r)$ e $y, z \in B(v,s)$ (ver Figura 1); sin pérdida de generalidad se puede suponer $s \geq r$. Dado que $K \geq 1$ es claro que $y \in B(v,s) \subset B(v, 3K^2 s)$. Además

$$\begin{aligned} d(x,v) &\leq K\big(d(x,z) + d(z,v)\big) \\ &\leq K\Big(K\big(d(x,u) + d(u,z)\big)\Big) + Kd(z,v) \\ &< 2K^2 r + Ks \\ &\leq 3K^2 s, \end{aligned}$$

entonces $B(v, 3K^2 s)$ es una bola que contiene a $x$ y a $y$. Por definición de $\delta$ y recordando que $\mu$ es una medida doblante existe una constante $C > 0$ tal que

$$\delta(x,y) \leq \mu\big(B(v, 3K^2 s)\big) \leq C\mu\big(B(v,s)\big).$$

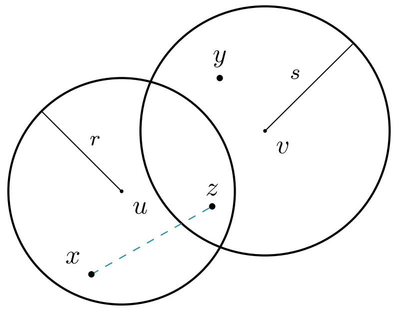


FIGURA 1

La desigualdad anterior es válida para cualquier bola $B(v,s)$ que contenga a $z$ y a $y$. Con lo cual

$$\delta(x,y) \leq \text{ínf}\{C\mu\left(B(v,s)\right) : y,z \in B(v,s)\} = C\delta(y,z),$$

y como $\delta(x,z) \geq 0$ entonces

$$\delta(x,y) \leq C\big(\delta(x,z) + \delta(z,y)\big).$$

Esto prueba que $\delta$ es una casi-métrica.

A continuación se probará que las topologías inducidas por $d$ y $\delta$ coinciden. Denotaremos por $B(x,r)$ y $B_\delta(x,r)$ a las bolas con centro en $x \in \mathbb{X}$ y radio $r > 0$ generadas por las casi-métricas $d$ y $\delta$, respectivamente.

Observar que como $\mu\big(\{x\}\big) = 0 < r$, existe $y \in B_\delta(x,r)$, $y \neq x$. Veamos ahora que vale la siguiente igualdad:

$$B_\delta(x,r) = \bigcup\{B \,:\, B \text{ es una } d\text{-bola}, \ x \in B \text{ y } \mu(B) < r\}. \tag{13}$$

En efecto, si $y \in B_\delta(x,r)$ entonces $\delta(x,y) < r$ y por definición

$$\delta(x,y) = \underset{B\supset\{x,y\}}{\text{ínf}} \mu(B) < r.$$

Entonces existe $B$ tal que $x, y \in B$ y $\mu(B) < r$, y así

$$y \in \bigcup\{B \,:\, B \text{ es una } d\text{-bola}, \ x \in B \text{ y } \mu(B) < r\}.$$

Por otro lado, si existe una $d$-bola $B$ tal que $x, y \in B$ y $\mu(B) < r$, se sigue que $\delta(x,y) < r$ e $y \in B_\delta(x,r)$.

Como las bolas de la casi-métrica $d$ son abiertas y la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, entonces $B_\delta(x,r)$ es abierto en la topología inducida por $d$. Esto muestra que $\mathscr{T}_\delta \subset \mathscr{T}_d$.

Para ver que $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_\delta$ consideremos una constante positiva $C$ tal que $\mu\big(B(z,3K^2s)\big) \leq C\mu\big(B(z,s)\big)$, para todo $z \in \mathbb{X}$ y $s > 0$ y sea $t = C^{-1}\mu\big(B(x,r)\big) > 0$. Veamos que $B_\delta(x,t) \subset B(x,r)$. Sea $y \in B_\delta(x,t)$. Entonces existe una $d$-bola $B(z,s)$ tal que $x, y \in B(z,s)$ con $\mu\left(B(z,s)\right) < t$. Luego $y \in B(x,2Ks) \subset B(z,3K^2s)$, pues

$$d(x,y) \leq K\big(d(x,z) + d(z,y)\big) < 2Ks,$$

y

$$d(y,z) \leq K\big(d(y,x)+d(x,z)\big) < 2K^2s + Ks < 3K^2s.$$

Además

$$\mu\big(B(x,2Ks)\big) \leq \mu\big(B(z,3K^2s)\big) \leq C\mu\big(B(z,s)\big) < Ct.$$

Pero $Ct = \mu\big(B(x,r)\big)$ por lo que $2Ks < r$, y así $B(x,2Ks) \subset B(x,r)$, lo que prueba que $y \in B(x,r)$. Luego $B(x,r)$ es abierto con respecto a $\delta$.

Hasta aquí, $\delta$ es una casi-métrica que define la misma topología que $d$. Finalmente, para ver que $(\mathbb{X},\delta,\mu)$ es 1-Ahlfors observemos primero que las bolas $B_\delta$ son conjuntos abiertos, luego son $\mu$-medibles puesto que $\mu$ es una medida definida sobre los borelianos de $\mathbb{X}$.

Sea $0 < r < \mu(\mathbb{X})$, $x \in \mathbb{X}$. Debido a que $\mu(\{x\}) = 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\mu\big(B(x,2^n)\big) < r \leq \mu\big(B(x,2^{n+1})\big).$$

Esto puede verse considerando la sucesión numérica $\{\mu(B(x,2^n))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y observando que es estrictamente creciente por ser $\mu$ una medida y $(\mathbb{X},d,\mu)$ no atómico.

Luego $B(x,2^n) \subset B_\delta(x,r)$ y por la propiedad de duplicación de $\mu$ existe $c_1 < 1$ tal que

$$\mu\big(B_\delta(x,r)\big) \geq \mu\big(B(x,2^n)\big) \geq c_1\mu\big(B(x,2^{n+1})\big) \geq c_1 r.$$

Ahora, por lo visto en (13) vale que

$$B_\delta(x,r) = \bigcup\{B \,:\, x \in B,\ \mu(B) < r\}.$$

Consideremos $R = \sup\{s > 0 : x \in B(z,s), \mu\big(B(z,s)\big) < r, z \in \mathbb{X}\}$, y para $n \in \mathbb{N}$ definimos $R_n = \text{mín}\{R,n\}$ y

$$B_\delta(x,r,n) = \bigcup\{B = B(z,s) : x \in B,\ \mu(B) < r,\ s \leq R_n\}.$$

Claramente $B_\delta(x,r,n) \subset B_\delta(x,r,n+1)$ y $B_\delta(x,r) = \bigcup_{n=1}^\infty B_\delta(x,r,n)$.

Luego, para ver que existe $c_2 > 0$ tal que

$$\mu\big(B_\delta(x,r)\big) \leq c_2 r,$$

será suficiente mostrar que $\mu\big(B_\delta(x,r,n)\big) \leq c_2 r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que $\mu(B_\delta(x,r)) = \mu(\cup B_\delta(x,r,n)) = \text{lím}_{n\to\infty}\mu(B_\delta(x,r,n))$.

Por definición de $B_\delta(x,r,n)$ podemos tomar una bola que llamaremos $B(x_n,r_n)$ tal que $x \in B(x_n,r_n)$, $\mu\left(B(x_n,r_n)\right) < r$ y $r_n > \frac{R_n}{2}$, donde esta última propiedad se desprende de la definición de $R_n$ y por ser $R$ un supremo. Luego para todo $y \in B(z,s)$, con $B(z,s)$ tal que $\mu\left(B(z,s)\right) < r$ que contiene a $x$ y $s \leq R_n$ vale que

$$\begin{aligned} d(y,x_n) &\leq K\big(d(y,x)+d(x,x_n)\big) \\ &\leq K\big(K\big(d(y,z)+d(z,x)\big)+d(x,x_n)\big) \\ &\leq K(2KR_n + r_n) \end{aligned}$$

$$\leq K(4Kr_n + r_n) < 5K^2 r_n,$$

con lo cual $B(z,s) \subset B(x_n, 5K^2 r_n)$ para cualquier $B(z,s)$ que contiene a $x$ con $s \leq R_n$ y por la propiedad de duplicación existe $c_2 > 1$ tal que

$$\mu\big(B_\delta(x,r,n)\big) \leq \mu\big(B(x_n, 5K^2 r_n)\big) \leq c_2 \mu\big(B(x_n, r_n)\big) < c_2 r.$$

Como se hallaron constantes positivas $c_1$ y $c_2$ tales que

$$c_1 r \leq \mu\big(B_\delta(x,r)\big) \leq c_2 r,$$

tomando $c = \max\left\{c_1^{-1}, c_2\right\} > 1$ se tiene que el espacio $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$ es 1-Ahlfors con constante $c$. $\square$

Capítulo 3

# El operador maximal de Hardy-Littlewood

En este capítulo daremos las definiciones necesarias para comprender en un sentido práctico la utilidad de los cambios de casi-métricas en la búsqueda de generalizar resultados. En este sentido, el objetivo será mostrar que la conocida clase de pesos de Muckenhoupt se mantiene invariante ante las diferentes topologías de los espacios $(\mathbb{X}, d, \mu)$ y $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$, para $\delta$ dada en el Teorema 2.1, pudiendo con ello aplicar resultados conocidos en espacios Ahlfors y obtener así familias de pesos en espacios de tipo homogéneo mas generales.

## 3.1. Definiciones y ejemplos

Para el desarrollo de este capítulo, debemos definir uno de los operadores básicos del análisis armónico, el operador maximal de Hardy-Littlewood, que resulta ser el operador que caracteriza a la clase de pesos de Muckenhoupt. En efecto, dichos pesos pueden verse como las densidades de las medidas que preservan la acotación del operador maximal sobre espacios de Lebesgue, los cuales definimos a continuación.

Definición 3.1. Sea $(\mathbb{X}, \mu)$ un espacio de medida. Denotamos por $L^p(\mathbb{X}, \mu)$, para $1 \leq p < \infty$, al espacio de funciones $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ cuya $p$-ésima potencia es integrable. La norma de $f \in L^p(\mathbb{X}, \mu)$ se define como

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{X}} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se dice que una propiedad vale $\mu$ casi todo punto de un conjunto $\mathbb{X}$, y se escribe $\mu$-c.t.p. si no es válida en a lo sumo un conjunto de medida nula.

Cuando $p = \infty$ entonces $L^\infty(\mathbb{X}, \mu)$ está compuesto por las funciones acotadas $\mu$-c.t.p., es decir las funciones tales que para algún $C > 0$

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{X} : |f(x)| > C\}\big) = 0,$$

y la norma de $f \in L^\infty(\mathbb{X}, \mu)$ es el ínfimo sobre todas las constantes $C$ que cumplen con esa propiedad, y se denota por $\|f\|_\infty$.

Una herramienta importante que utilizaremos es la **desigualdad de Hölder**. Esto es, si $1 \leq p, q \leq \infty$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (donde entendemos $\frac{1}{\infty} = 0$), entonces para todo par $f, g$ de funciones medibles en $(\mathbb{X}, \mu)$, se tiene

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q,$$

o en forma equivalente

$$\int_{\mathbb{X}} |fg|\, d\mu \leq \left( \int_{\mathbb{X}} |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{X}} |g|^q\, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Definición 3.2. Se dice que una función $f$ es localmente integrable en un espacio de tipo homogéneo $(\mathbb{X}, d, \mu)$, si $f \in L^1(K, \mu)$ para todo $K \subset \mathbb{X}$ compacto, y lo denotamos por $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{X}, \mu)$.

Definición 3.3. Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Se define el **operador maximal de Hardy-Littlewood** para cada $x \in \mathbb{X}$ como

$$\mathcal{M}_\mu f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|\, d\mu.$$

Cuando $d\mu = dx$ en $\mathbb{R}^n$, denotaremos al operador maximal por $\mathcal{M}$.

Si $\nu$ es una medida de Borel, esto es, su dominio es la $\sigma$-álgebra de Borel en $\mathbb{X}$, esta definición se extiende para $\nu$ no negativa tal que las bolas tienen medida finita como

$$\mathcal{M}_\mu \nu(x) = \sup_{B \ni x} \frac{\nu(B)}{\mu(B)},$$

y su versión centrada se define como

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\mu \nu(x) = \sup_{r>0} \frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)}.$$

Observación 3.1. Si $\mu$ es doblante entonces $\mathcal{M}_\mu$ es equivalente a $\widetilde{\mathcal{M}}_\mu$. En efecto, dado que $\widetilde{\mathcal{M}}_\mu \leq \mathcal{M}_\mu$ trivialmente, basta ver que existe $C > 0$ tal que $\mathcal{M}_\mu \nu(x) \leq C \widetilde{\mathcal{M}}_\mu \nu(x)$, para todo $x \in \mathbb{X}$ y toda medida $\nu$. Sean $y \in \mathbb{X}$ y $r > 0$ tales que $B(y, r)$ es una bola que contiene a $x$. Si $z \in B(y, r)$ entonces

$$d(z, x) \leq K\big(d(z, y) + d(y, x)\big) < 2Kr,$$

y si $w \in B(x, 2Kr)$

$$d(w, y) \leq K\big(d(w, x) + d(x, y)\big) < K(2Kr + r) = (2K^2 + K)r.$$

Luego $B(y, r) \subset B(x, 2Kr) \subset B(y, (2K^2 + K)r)$ y por duplicación de $\mu$ tenemos que $\mu(B(y, (2K^2 + K)r)) \leq A^l \mu(B(y, r))$ donde $l$ es el mínimo entero tal que $\log_2(2K^2 + K) \leq l$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\nu(B(y,r))}{\mu(B(y,r))} &\leq \frac{\mu\big(B(x,2Kr)\big)}{\mu(B(y,r))} \frac{\nu\big(B(x,2Kr)\big)}{\mu\big(B(x,2Kr)\big)} \\
&\leq \frac{\mu\big(B\big(y,(2K^2+K)r\big)\big)}{\mu\big(B(y,r)\big)} \frac{\nu\big(B(x,2Kr)\big)}{\mu\big(B(x,2Kr)\big)}
\end{aligned}$$

$$\leq A^l \frac{\nu\big(B(x,2Kr)\big)}{\mu\big(B(x,2Kr)\big)}.$$

Tomando supremo en $r$ se obtiene la cota de lado derecho para cualquier $y$. Luego tomando supremo en el miembro izquierdo sobre todas las bolas que cubren a $x$ se tiene $\mathcal{M}_\mu\nu(x) \leq A^l\widetilde{\mathcal{M}}_\mu\nu(x)$, como queríamos probar.

Ejemplo 3.1. Sean $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \lambda)$ y $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función constante, esto es, $f(x) = c$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se tiene

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(t)|\,dt = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |c|\,dt = |c|.$$

Ejemplo 3.2. Sean $(\mathbb{R}, |\cdot|, \lambda)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y definamos $f$ como la función característica del intervalo $[a,b]$, $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$. Sea $m_r(f)(x)$ el promedio de $f$ en $(x-r, x+r)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Esto es

$$m_r(f)(x) = \frac{\lambda\big((x-r,x+r)\cap[a,b]\big)}{2r}.$$

Para $x \in (a,b)$ se tienen los siguientes casos:

- si $(x-r, x+r) \subset [a,b]$

$$m_r(f)(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} dt = \frac{x+r-x+r}{2r} = 1;$$

- si $x - r \leq a$

$$m_r(f)(x) = \frac{1}{2r}\int_{a}^{\text{mín}\{x+r,b\}} dt = \frac{\text{mín}\{x+r,b\}-a}{2r} \leq 1,$$

  dado que $x + r \leq a + 2r$ y $b - a < r$;
- si $x + r \geq b$

$$m_r(f)(x) = \frac{1}{2r}\int_{\text{máx}\{x-r,a\}}^{b} dt = \frac{b-\text{máx}\{x-r,a\}}{2r} \leq 1,$$

  dado que $x - r \geq b - 2r$ y $b - a < r$;

Entonces la función $m_r(f)(x)$, para $x \in (a,b)$, alcanza su máximo cuando $(x-r,x+r) \subset [a,b]$, por lo que $\widetilde{\mathcal{M}}f(x) = 1$.

Para $x \leq a$, se tiene

$$m_r(f)(x) = \frac{1}{2r}\int_{a}^{\text{mín}\{x+r,b\}} dt = \frac{\text{mín}\{x+r,b\}-a}{2r}.$$

Si $r \leq a - x$ la medida de $(x-r,x+r)\cap[a,b]$ es nula y si $r > b - x$ la integral es $\frac{b-a}{2r}$ y tiende a cero cuando $r$ tiende a infinito. Por otro lado, si $a - x < r \leq b - x$, $0 < m_r(f)(x) \leq \frac{b-a}{2r}$ y el máximo se alcanza cuando $r = b - x$.

Para $x \geq b$, se tiene

$$m_r(f)(x) = \frac{1}{2r}\int_{\max\{x-r,a\}}^{b} dt = \frac{b - \max\{x-r,a\}}{2r},$$

y procediendo análogamente al caso $x \leq a$, se puede ver que $m_r(f)(x)$ alcanza su máximo cuando $r = x - a$.

En conclusión, hemos probado que el operador maximal centrado de una función característica de un intervalo viene dado por

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\chi_{[a,b]})(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2(b-x)}\,, & \text{si } x \leq a; \\ 1\,, & \text{si } x \in (a,b); \\ \frac{b-a}{2(x-a)} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Ejemplo 3.3. Sean $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo y $\delta_0$ la medida delta de Dirac en algún $x_0 \in \mathbb{X}$, definida como $\delta_0(x_0) = 1$ y $\delta_0(x) = 0$ para todo $x \neq x_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_\mu \delta_0(x) &= \sup_{r>0} \frac{\delta_0\big(B(x,r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} \\ &= \sup_{r>d(x,x_0)} \frac{\delta_0\big(B(x,r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} \\ &= \frac{1}{\mu\big(\overline{B}\big(x, d(x,x_0)\big)\big)}, \end{aligned}$$

donde $\overline{B}(x,s) = \{y \in \mathbb{X} : d(x,y) \leq s\}$.

En el contexto de espacios de tipo homogéneo se tiene el siguiente resultado de acotación para el operador maximal conocido como tipo débil $(1,1)$. La demostración para el operador actuando sobre funciones localmente integrables puede verse en [**GCRdF85**]. Veremos más adelante que, en general, los operadores que satisfacen la acotación de tipo débil $(1,1)$ cumplen con la desigualdad de Kolmogorov, la cual utilizaremos en la demostración del Teorema 3.2.

Teorema 3.1 ([**CW71**, Théorème 2.1]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo. Si $\nu$ es una medida finita entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood para medidas es de tipo débil $(1,1)$, esto es, para todo $\alpha > 0$ existe una constante positiva $C$ tal que*

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{X} : \mathcal{M}_\mu \nu(x) > \alpha\}\big) \leq \frac{C}{\alpha}\nu(\mathbb{X}). \tag{14}$$

Demostración. Es suficiente demostrarlo para el operador maximal centrado, pues hemos visto que son equivalentes.

Sean $\nu$ una medida finita, $E_\alpha = \{x \in \mathbb{X} : \widetilde{\mathcal{M}}_\mu \nu(x) > \alpha\}$ y $E_\alpha^R = E_\alpha \cap B(x_0, R)$ para cada $R > 0$ y algún $x_0 \in \mathbb{X}$. Para todo

$x \in E_\alpha^R$ existe $r = r(x) > 0$ tal que

$$\frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} > \alpha.$$

Claramente $\{B(x, r(x))\}_{x\in E_\alpha^R}$ es un cubrimiento para $E_\alpha^R$ y por la Proposición 2.3 existe una sucesión a lo sumo numerable $\{x_i\}_{i\in I} \subset E_\alpha^R$, tales que las bolas de la familia $\{B\big(x_i, r(x_i)\big)\}_{i\in I}$ son disjuntas y la familia $\{B\big(x_i, Cr(x_i)\big)\}_{i\in I}$, con $C > 4K$, es un cubrimiento de $E_\alpha^R$. Luego

$$\begin{aligned}
\nu(\mathbb{X}) &\geq \nu\left(\bigcup_{i\in I} B\big(x_i, r(x_i)\big)\right)\\
&= \sum_{i\in I} \nu\big(B\big(x_i, r(x_i)\big)\big)\\
&\geq \alpha \sum_{i\in I} \mu\big(B\big(x_i, r(x_i)\big)\big)\\
&\geq \frac{\alpha}{\widetilde{C}} \sum_{i\in I} \mu\big(B\big(x_i, Cr(x_i)\big)\big)\\
&\geq \frac{\alpha}{\widetilde{C}} \mu(E_\alpha^R),
\end{aligned}$$

con $\widetilde{C} = \lceil \log_2(C) \rceil$, independiente de $i$ y $R$. Tomando $R \to \infty$ se obtiene (14). $\square$

Como observamos anteriormente, del hecho que el operador maximal $\mathcal{M}_\mu$ es de tipo débil $(1,1)$ se desprende la desigualdad de Kolmogorov para $\mathcal{M}_\mu$. Probaremos dicha desigualdad para un operador general $T$ de tipo débil $(1,1)$, es decir, que satisface una desigualdad análoga a (14).

Lema 3.1. *Sean $(\mathbb{X}, \mu)$ un espacio de medida y $T$ un operador de tipo débil $(1,1)$ que actúa sobre medidas en $\mathbb{X}$. Para toda medida $\nu$, $0 < \gamma < 1$, y $E$ un conjunto de medida $\mu$ finita que contiene al soporte de $\nu$, entonces existe una constante $C$ dependiendo de $\gamma$ tal que*

$$\int_E |T\nu(x)|^\gamma \, d\mu(x) \leq C\mu(E)^{1-\gamma}\nu(E)^\gamma.$$

Demostración. Escribimos la integral en términos de la función de distribución

$$\int_E |T\nu(x)|^\gamma \, d\mu(x) = \gamma \int_0^\infty \alpha^{\gamma-1} \mu\big(\{x \in E : T\nu(x) > \alpha\}\big) \, d\alpha.$$

Por ser $T$ de tipo débil $(1,1)$ existe una constante positiva $\widetilde{C}$ tal que $\mu(\{x \in E : T\nu(x) > \alpha\}) \leq \frac{\widetilde{C}}{\alpha}\nu(E)$. Mas aún, como se tiene

$\mu(\{x \in E : T\nu(x) > \alpha\}) \leq \mu(E)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E |T\nu(x)|^\gamma \, d\mu(x) &\leq \gamma \int_0^\infty \alpha^{\gamma-1} \min\left(\mu(E), \tfrac{\widetilde{C}}{\alpha}\nu(E)\right) d\alpha \\ &\leq \gamma \int_0^{\frac{\widetilde{C}\nu(E)}{\mu(E)}} \alpha^{\gamma-1}\mu(E)\, d\alpha + \gamma \int_{\frac{\widetilde{C}\nu(E)}{\mu(E)}}^\infty \tilde{C}\alpha^{\gamma-2}\nu(E)\, d\alpha \\ &\leq \frac{\widetilde{C}^\gamma}{1-\gamma}\, \mu(E)^{1-\gamma}\nu(E)^\gamma,\end{aligned}$$

donde usamos que

$$\min\left(\mu(E), \tfrac{\widetilde{C}\nu(E)}{\alpha}\right) = \begin{cases} \mu(E), & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{\widetilde{C}\nu(E)}{\mu(E)}; \\ \frac{\widetilde{C}}{\alpha}\nu(E), & \text{si } \frac{\widetilde{C}\nu(E)}{\mu(E)} \leq \alpha \leq \infty. \end{cases} \qquad \square$$

En 1972, B. Muckenhoupt publicó [**Muc72**], en donde desarrolló la teoría de desigualdades pesadas para el operador maximal de Hardy-Littlewood. Su problema principal era determinar la clase de funciones $w$ en $\mathbb{R}^n$ tales que cuando $d\mu(x) = w(x)dx$, exista una constante $C$ independiente de $f$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}f(x)|^p \, d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\mu(x), \tag{15}$$

para algún $1 < p < \infty$. Las densidades $w$ para las cuales se satisface (15) son caracterizadas por la clase de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \lambda)$. En lo que sigue daremos la definición de esta clase para un espacio de tipo homogéneo $(\mathbb{X}, d, \mu)$.

Definición 3.4. Un **peso** $w$ es una función no negativa localmente integrable definida sobre un espacio de tipo homogéneo $(\mathbb{X}, d, \mu)$. Dado un peso $w$ y un conjunto medible $E$, se usa la notación

$$w(E) = \int_E w \, d\mu,$$

para denotar la $w$-medida del conjunto $E$.

Definición 3.5. Diremos que un peso $w$ pertenece a la **clase de Muckenhoupt $\boldsymbol{A_p(\mathbb{X}, d, \mu)}$** para $1 < p < \infty$ si existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\mu(B)^p}\left(\int_B w \, d\mu\right)\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}} \, d\mu\right)^{p-1} \leq C,$$

para toda bola $B$ en $\mathbb{X}$, y para $p = 1$ si existe una constante $C$ tal que

$$\mathcal{M}_\mu w(x) \leq C w(x), \tag{16}$$

para $\mu$-c.t.p $x \in \mathbb{X}$. Se define $A_\infty(\mathbb{X}, d, \mu) = \bigcup_{p \geq 1} A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$.

Cuando no haya confusión sobre qué espacio se está trabajando escribiremos simplemente $A_p$, para $1 \leq p \leq \infty$ y denotaremos $w \in A_p$.

Observación 3.2. La condición $A_1$ es equivalente a que para toda $B$ en $\mathbb{X}$, existe una constante $C$ tal que

$$\frac{w(B)}{\mu(B)} \leq C w(x), \tag{17}$$

para $\mu$-c.t.p. $x \in B$. En efecto, dado que trivialmente (16) implica (17), basta probar la otra implicación. Para esto tomemos $x \in \mathbb{X}$ tal que $\mathcal{M}_\mu w(x) > C w(x)$. Luego, por definición del operador maximal, existe una bola $B$ en $\mathbb{X}$ tal que $\frac{w(B)}{\mu(B)} > C w(x)$, y por (17), $x$ pertenece a un conjunto de medida nula, como se quería probar.

Las siguientes propiedades de los pesos en $A_p$ son consecuencias de su definición.

Lema 3.2. *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo y $w$ un peso en $(\mathbb{X}, d, \mu)$.*

(i) *Si $w \in A_p$ entonces $cw \in A_p$ para todo $c > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$.*
(ii) *$A_p \subset A_q$ si $1 \leq p < q \leq \infty$.*
(iii) *Si $w \in A_p$, para $1 \leq p \leq \infty$, entonces $w\,d\mu$ cumple con la propiedad de duplicación.*

Demostración. Para probar (i) tomemos $c > 0$. Consideremos primero $p = 1$. Por definición del operador maximal y la hipótesis

$$\mathcal{M}_\mu\big(c\,w(x)\big) = c\,\mathcal{M}_\mu w(x) \leq c\,C w(x),$$

donde $C$ es la constante de la condición $A_1$ para $w$; luego $c\,w \in A_1$.

Si $p > 1$, para cada bola $B$ en $\mathbb{X}$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B)^p}&\left(\int_B c\,w\,d\mu\right)\left(\int_B (c\,w)^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{p-1}\\ &= \frac{1}{\mu(B)^p}\left(\int_B w\,d\mu\right)\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{p-1} \leq C,\end{aligned}$$

entonces $c\,w \in A_p$.

Para ver (ii), observemos que el caso $q = \infty$ se desprende de la definición de $A_\infty$. Ahora, sean $1 = p < q < \infty$ y $w \in A_1$. Dada una bola $B$ en $\mathbb{X}$, existe una constante $C$ tal que

$$\frac{w(B)}{\mu(B)} \leq C w(x),$$

para $\mu$-c.t.p $x \in B$. Entonces, como $1 - q < 0$,

$$\begin{aligned}\left(\int_B w^{\frac{1}{1-q}}\,d\mu\right)^{q-1} &\leq \left(\int_B \left(\frac{C^{-1}w(B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{1-q}} d\mu\right)^{q-1}\\ &= C\left(\big(\mu(B)\big)^{\frac{1}{q-1}}\,w(B)^{\frac{1}{1-q}}\,\mu(B)\right)^{q-1}\\ &= C\,\mu(B)^q\,w(B)^{-1},\end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{1}{\mu(B)^q}\left(\int_B w\,d\mu\right)\left(\int_B w^{\frac{1}{1-q}}\,d\mu\right)^{q-1}\leq C,$$

y $w\in A_q$.

Si $p>1$, utilizando la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados $\frac{1-q}{1-p}$ y $\frac{1-q}{p-q}$ (pues $\frac{1-p}{1-q}+\frac{p-q}{1-q}=1$ y $1\leq\frac{1-q}{p-q},\frac{1-q}{1-p}\leq\infty$) se obtiene

$$\begin{aligned}\int_B w^{\frac{1}{1-q}}\,d\mu=\int_{\mathbb{X}} w^{\frac{1}{1-q}}\chi_B\,d\mu&\leq\left(\int_{\mathbb{X}} w^{\frac{1}{1-q}\frac{1-q}{1-p}}\chi_B\,d\mu\right)^{\frac{1-p}{1-q}}\left(\int_{\mathbb{X}}\chi_B\,d\mu\right)^{\frac{p-q}{1-q}}\\&\leq\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{\frac{1-p}{1-q}}\left(\int_B d\mu\right)^{\frac{p-q}{1-q}}\\&=\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{q-1}}\mu(B)^{\frac{q-p}{q-1}}.\end{aligned}$$

Elevando a la $q-1$ y dividiendo por $\mu(B)^q$ a ambos miembros se tiene

$$\frac{1}{\mu(B)^q}\left(\int_B w^{\frac{1}{1-q}}\,d\mu\right)^{q-1}\leq\frac{1}{\mu(B)^p}\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{p-1}.$$

Finalmente, multiplicando por $w(B)$ se tiene que $w\in A_q$ siempre que $w\in A_p$, como se quería probar.

Para probar (iii) consideremos $w\in A_p$, con $1\leq p\leq\infty$, $B$ una bola en $\mathbb{X}$ y $S\subset B$ medible. Utilizando la desigualdad de Hölder y la condición $A_p$ para $w$ existe una constante positiva $C$ independiente de $B$ al que

$$\begin{aligned}\mu(S)&=\int_S w^{\frac{1}{p}}w^{-\frac{1}{p}}\,d\mu\\&\leq\left(\int_S w\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S w^{\frac{1}{1-p}}d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\\&=w(S)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S w^{\frac{1}{1-p}}d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\\&\leq w(S)^{\frac{1}{p}}\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\\&\leq C^{\frac{1}{p}}w(S)^{\frac{1}{p}}\frac{\mu(B)}{w(B)^{\frac{1}{p}}}.\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\mu(S)}{\mu(B)}\leq C^{\frac{1}{p}}\left(\frac{w(S)}{w(B)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

y tomando $S = B(x,r)$ y $B = B(x,2r)$ para algún $x \in \mathbb{X}$ y $r > 0$ se tiene

$$\frac{\mu\big(B(x,r)\big)}{\mu\big(B(x,2r)\big)} \leq C^{\frac{1}{p}} \left(\frac{w\big(B(x,r)\big)}{w\big(B(x,2r)\big)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, por duplicación de $\mu$, obtenemos

$$w\big(B(x,2r)\big) \leq \widetilde{A} w\big(B(x,r)\big),$$

con $\widetilde{A} = CA^p$ y $A$ la constante de duplicación de $\mu$. Así $w\,d\mu$ cumple con la propiedad de duplicación. $\square$

Otra propiedad importante que cumplen los pesos en $A_p$ es conocido como teorema de factorización de Jones (ver [**Jon80**]), el cual dice que un peso $w \in A_p$ si y sólo si puede reescribirse como $w = w_0 w_1^{1-p}$, con $w_0, w_1 \in A_1$. Veremos a continuación una de dichas implicaciones, la cual usaremos más adelante. Si bien en la literatura se menciona como válida, la prueba fue escrita recientemente en [**Bon21**].

PROPOSICIÓN 3.1 ([**Bon21**, Teorema 34]). *Sea $\big(\mathbb{X}, d, \mu\big)$ un espacio de tipo homogéneo y sean $w_0, w_1 \in A_1$. Entonces para cada $1 < p < \infty$ se tiene que $w = w_0 w_1^{1-p}$ pertenece a la clase $A_p$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $1 < p < \infty$ y $w_0, w_1 \in A_1$ fijos. Consideremos $w = w_0 w_1^{1-p}$ y sea $B$ una bola en $\mathbb{X}$. Entonces

$$\left(\int_B w\,d\mu\right)\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{p-1} = \left(\int_B w_0 w_1^{1-p}\,d\mu\right)\left(\int_B w_1 w_0^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{p-1}.$$

Como $w_1 \in A_1$ entonces existe una constante positiva $C_1$ tal que para $\mu$-c.t.p $x \in B$ se satisface la desigualdad

$$\frac{w_1(B)}{\mu(B)} \leq C_1 w_1(x),$$

y como $1 - p < 0$

$$\big(w_1(x)\big)^{1-p} \leq C_1^{p-1}\left(\frac{w_1(B)}{\mu(B)}\right)^{1-p},$$

para $\mu$-c.t.p. $x \in B$. Análogamente, como $\frac{1}{1-p} < 0$ y $w_0 \in A_1$ se tiene para $\mu$-c.t.p. $x \in B$

$$\big(w_0(x)\big)^{\frac{1}{1-p}} \leq C_0^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{w_0(B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

donde $C_0$ es la constante de la condición $A_1$ para $w_0$. Así

$$\begin{aligned}\left(\int_B w\,d\mu\right)&\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}\,d\mu\right)^{p-1}\\ &\leq C\left(\frac{w_1(B)}{\mu(B)}\right)^{1-p}\left(\int_B w_0\,d\mu\right)\left(\left(\frac{w_0(B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{1-p}}\int_B w_1\,d\mu\right)^{p-1}\\ &= C\big(\mu(B)\big)^p w_0(B)\big(w_0(B)\big)^{-1}\big(w_1(B)\big)^{1-p}\big(w_1(B)\big)^{p-1}\\ &= C\big(\mu(B)\big)^p,\end{aligned}$$

lo que prueba que $w \in A_p$. □

Como consecuencia de la Proposición 3.1 se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2 ([**Bon21**, Proposición 35]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo. Si $w^\gamma \in A_1$ para todo $0 < \gamma < 1$ entonces $w^\beta \in A_p$ para todo $1 - p < \beta < 1$, con $1 < p < \infty$.*

Demostración. Para $1 - p < \beta < 1$ definimos $\gamma = \frac{\beta-1+p}{p}$. Dado que $0 < \gamma < 1$ y $0 < 1 - \gamma < 1$, por hipótesis se tiene que $w_0 = w^\gamma$ y $w_1 = w^{1-\gamma}$ pertenecen a $A_1$ y por la Proposición 3.1, $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$. Pero

$$w_0 w_1^{1-p} = w^\gamma w^{(1-\gamma)(1-p)} = w^{1-p} w^{\gamma p} = w^\beta,$$

por lo que $w^\beta \in A_p$ como se quería probar. □

## 3.2. Resultados en espacios $\alpha$-Ahlfors

El siguiente teorema nos provee de una familia de pesos a partir del operador maximal de Hardy-Littlewood para espacios de tipo homogéneo. Cuando podamos describir el comportamiento del operador maximal aplicado a una medida dada, obtendremos en forma explícita dicha familia.

Teorema 3.2 ([**ACDT14**, Theorem 3]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo. Sea $\nu$ una medida de Borel tal que $\mathcal{M}_\mu \nu(x) < \infty$ $\mu$-c.t.p. $x \in \mathbb{X}$. Entonces $(\mathcal{M}_\mu \nu)^\gamma \in A_1$ para todo $0 \leq \gamma < 1$.*

Demostración. Como $\mathcal{M}_\mu \nu < \infty$, si $\gamma = 0$ entonces $(\mathcal{M}_\mu \nu)^\gamma = 1$. Pero las funciones constantes no negativas $c$ son pesos de $A_1$ ya que como vimos en el Ejemplo 3.1, $\mathcal{M}_\mu(c) = c$, y el teorema queda probado para este caso.

Si $\gamma \neq 0$, por la Observación 3.2, basta probar que existe una constante $C$ tal que la desigualdad

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B (\mathcal{M}_\mu \nu)^\gamma\,d\mu \leq C\big(\mathcal{M}_\mu \nu(x)\big)^\gamma, \tag{18}$$

es válida para toda bola $B$ en $\mathbb{X}$ y $\mu$-c.t.p. $x \in B$.

Sean $x_0 \in \mathbb{X}$, $r_0 > 0$ fijos y $B = B(x_0, r_0)$. Definimos $\nu_1$ como $\nu$ restringida a $B(x_0, 2Kr_0)$, esto es, $\nu_1(E) \coloneqq \nu(E \cap B(x_0, 2Kr_0))$ y $\nu_2(E) \coloneqq \nu(E \cap B(x_0, 2Kr_0)^c)$ es decir, $\nu_2 = \nu - \nu_1$. Luego, para $0 < \gamma < 1$, tenemos

$$(\mathcal{M}_\mu \nu)^\gamma \le (\mathcal{M}_\mu \nu_1)^\gamma + (\mathcal{M}_\mu \nu_2)^\gamma,$$

y es suficiente demostrar (18) con $\nu_1$ y $\nu_2$.

Como $\mathcal{M}_\mu$ satisface la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ (ver Teorema 3.1) y $\nu_1$ es finita, podemos aplicar la desigualdad de Kolmogorov (Lema 3.1) en $(\mathbb{X}, d, \mu)$ y obtener una constante $C$ tal que

$$\int_E (\mathcal{M}_\mu \nu_1)^\gamma \, d\mu \le C\mu(E)^{1-\gamma} \nu_1(E)^\gamma = C\mu(E)^{1-\gamma} \nu\big(E \cap B(x_0, 2Kr_0)\big)^\gamma,$$

para todo $E \subset \mathbb{X}$ medible, de medida finita y que contenga al soporte de $\nu_1$.

En particular, tomando $E = B$ se tiene $B \cap B(x_0, 2Kr_0) = B$ y para cada $x \in B$

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B (\mathcal{M}_\mu \nu_1)^\gamma \, d\mu \le C \left( \frac{\nu(B)}{\mu(B)} \right)^\gamma \le C\big(\mathcal{M}_\mu \nu(x)\big)^\gamma.$$

Para analizar $\mathcal{M}_\mu \nu_2$ tomemos $y \in B$ y $B_1 = B(x_1, r_1)$ una bola que contiene a $y$ con $\nu_2(B_1) > 0$. Por definición de $\nu_2$ debe existir $z \in B_1 \cap \big(\mathbb{X} \setminus B(x_0, 2Kr_0)\big)$, entonces

$$\begin{aligned} 2Kr_0 \le d(z, x_0) &\le K\big(d(z,y) + d(y, x_0)\big) \\ &< K\big(K\big(d(z, x_1) + d(x_1, y)\big) + r_0\big) \\ &< K(2Kr_1 + r_0), \end{aligned}$$

y tenemos que $r_0 < 2Kr_1$.

Ahora bien, dado $x \in B$,

$$\begin{aligned} d(x, x_1) &\le K^2\big(d(x, x_0) + d(x_0, y) + d(y, x_1)\big) \\ &< K^2(2r_0 + r_1) \\ &< 4K^3 r_1 + K^2 r_1 \\ &\le 5K^3 r_1, \end{aligned}$$

por lo que $B \subset B(x_1, 5K^3 r_1)$ y se tiene

$$\frac{\nu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)}{\mu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)} \le \mathcal{M}_\mu \nu(x).$$

Por otro lado $\nu_2(B_1) \le \nu_2(B(x_1, 5K^3 r_1)) \le \nu(B(x_1, 5K^3 r_1))$, así

$$\begin{aligned} \frac{\nu_2(B_1)}{\mu(B_1)} &\le \frac{\nu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)}{\mu(B_1)} \, \frac{\mu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)}{\mu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)} \\ &= \frac{\mu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)}{\mu(B_1)} \, \frac{\nu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)}{\mu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)}, \end{aligned}$$

y como $B_1$ es una bola arbitraria que contiene a $y$, por la duplicación de $\mu$, tomando supremos se tiene que

$$\mathcal{M}_\mu \nu_2(y) \leq \frac{\mu\big(B(x_1, 5K^3 r_1)\big)}{\mu(B_1)} \mathcal{M}_\mu \nu(x) \leq A^l \mathcal{M}_\mu \nu(x),$$

donde $l$ es el mínimo número natural tal que $2^l \geq 5K^3$. Elevando a la potencia $\gamma$ e integrando con respecto a $y$ obtenemos

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B (\mathcal{M}_\mu \nu_2)^\gamma \, d\mu \leq A^{l\gamma} \mathcal{M}_\mu \nu(x)^\gamma,$$

para cada $x \in B$, como queríamos probar. $\square$

Un primer ejemplo de familia de pesos obtenida a partir del Teorema 3.2 es consecuencia del Ejemplo 3.3, donde estudiamos el comportamiento del operador maximal actuando sobre la medida delta de Dirac, como veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean* $(\mathbb{X}, d, \mu)$ *un espacio de tipo homogéneo,* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y* $1 < p < \infty$. *Luego, para* $-1 < \beta < p - 1$ *se tiene que* $\mu(B(x, d(x, x_0)))^\beta \in A_p$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \mathbb{X}$ y $\delta_0$ la medida delta de Dirac en $x_0$. Por lo visto en el Ejemplo 3.3 se tiene

$$\mathcal{M}_\mu \delta_0(x) = \frac{1}{\mu\big(\overline{B}\big(x, d(x, x_0)\big)\big)}.$$

Dado que $\mu$ es doblante

$$\mu\big(B(x, s)\big) \leq \mu\big(\overline{B}(x, s)\big) \leq \mu\big(B(x, 2s)\big) \leq A\mu\big(B(x, s)\big),$$

y se tiene $\mathcal{M}_\mu \delta_0(x) \simeq \mu\big(B\big(x, d(x, x_0)\big)\big)^{-1}$. Luego por el Teorema 3.2 y el Lema 3.2 (I), $\mu\big(B(x, d(x, x_0))\big)^{-\gamma} \in A_1(\mathbb{X}, d, \mu)$, para todo $0 < \gamma < 1$. Finalmente, tomando $w(x) = \mu(B(x, d(x, x_0)))^{-\gamma}$ en la Proposición 3.2, $\mu\big(B(x, d(x, x_0))\big)^\beta \in A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ para $-1 < \beta < p-1$ y $1 < p < \infty$. $\square$

Observemos que en la proposición anterior los pesos vienen dados por la medida de bolas cuyo radio es la distancia a $x_0$, es decir, al soporte de la medida $\delta_0$ sobre la cual actuaba el operador maximal. Si, en particular, nos encontramos en un espacio $\alpha$-Ahlfors, para algún $\alpha > 0$, la expresión de la familia de pesos resulta ser $d(x, x_0)^{\alpha\beta}$, para $-1 < \beta < p - 1$, obteniendo una expresión que depende de la distancia del punto al soporte de la medida.

Esta idea puede generalizarse, pensando en una medida soportada ya no en un conjunto unitario, sino en un conjunto $F$ con la propiedad de ser $s$-Ahlfors con una medida $\nu$ dada, para algún $0 \leq s < \alpha$. Para ello, deberemos analizar el comportamiento del operador maximal aplicado a dicha medida y su relación con la función distancia, como veremos a continuación.

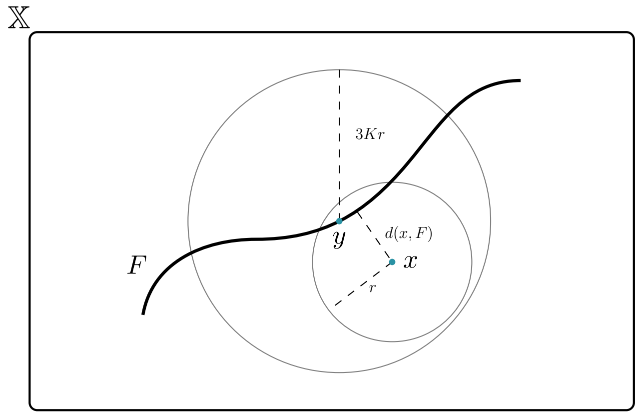


FIGURA 2

TEOREMA 3.3 ([**ACDT14**, Theorem 7]). *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio* $\alpha$*-Ahlfors con medida* $\mu$ *para algún* $\alpha > 0$ *y* $F \subset \mathbb{X}$ *cerrado. Si* $(F, d)$ *es s-Ahlfors con medida* $\nu$*, donde* $0 \leq s < \alpha$*, entonces para todo* $0 \leq \gamma < 1$ *se tiene* $(\mathcal{M}_\mu \nu(x))^\gamma \simeq d(x, F)^{\gamma(s-\alpha)} \in A_1$.

DEMOSTRACIÓN. Como el espacio $(\mathbb{X}, d, \mu)$ es de tipo homogéneo, por el Teorema 3.2 basta ver que $\mathcal{M}_\mu \nu(x) \simeq d(x, F)^{s-\alpha}$ $\mu$-c.t.p. $x \in \mathbb{X}$, siempre que sea $\mathcal{M}_\mu \nu(x) < \infty$ $\mu$-c.t.p. $x \in \mathbb{X}$.

Consideremos primero el caso $x \notin F$. Notar que por ser $F$ cerrado entonces $d(x, F) > 0$. Luego, si $0 < r < d(x, F)$, $B(x, r) \cap F = \varnothing$ y por lo tanto $\nu\big(B(x, r)\big) = 0$, dado que el soporte de $\nu$ es $F$. Resta calcular el operador maximal tomando supremo sobre $r \geq d(x, F) > 0$. Para ello, como $d(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in \mathbb{X}\}$, existe $y \in F$ tal que $d(x, y) < \frac{3}{2} d(x, F)$. Luego, para $z \in B(x, r)$

$$d(z, y) \leq K\big(d(z, x) + d(x, y)\big) < K\big(r + \tfrac{3}{2} d(x, F)\big) < K(r + \tfrac{3}{2} r) < 3Kr,$$

entonces $B(x, r) \subset B(y, 3Kr)$ (ver Figura 2). Así, llamando $c_\mu$ y $c_\nu$ a las constantes de las condiciones Ahlfors de $(\mathbb{X}, d)$ y $(F, d)$ respectivamente, se tiene

$$\frac{\nu\big(B(x, r)\big)}{\mu\big(B(x, r)\big)} \leq \frac{\nu\big(B(y, 3Kr)\big)}{\mu\big(B(x, r)\big)} \leq c_\mu c_\nu (3Kr)^s r^{-\alpha} \leq C d(x, F)^{s-\alpha},$$

y se tiene $\mathcal{M}_\mu \nu(x) \leq C d(x, F)^{s-\alpha}$ para $x \notin F$.

Por otro lado, si $z \in B\big(y, \frac{1}{2} d(x, F)\big)$,

$$d(z, x) \leq K\big(d(z, y) + d(y, x)\big) < K\big(\tfrac{1}{2} d(x, F) + \tfrac{3}{2} d(x, F)\big) = 2K d(x, F),$$

por lo que $B\big(y, \frac{1}{2} d(x, F)\big) \subset B\big(x, 2K d(x, F)\big)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\mu \nu(x) &\geq \frac{\nu\big(B(x, 2K d(x, F))\big)}{\mu\big(B(x, 2K d(x, F))\big)} \\ &\geq \frac{\nu\big(B(y, \frac{1}{2} d(x, F))\big)}{\mu\big(B(x, 2K d(x, F))\big)} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{c_\nu^{-1}\big(\frac{1}{2}d(x,F)\big)^s}{c_\mu\big(2Kd(x,F)\big)^\alpha}$$
$$= Cd(x,F)^{s-\alpha}.$$

Por lo tanto, si $x \notin F$ tenemos $\mathcal{M}_\mu\nu(x) \simeq d(x,F)^{s-\alpha}$.

Si $x \in F$ notar que

$$\frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} \geq \frac{1}{c_\nu c_\mu} r^{s-\alpha},$$

y tomando supremo sobre $0 < r < \text{diám}(F)$ obtenemos $\mathcal{M}_\mu\nu(x) = \infty$. Esto no es un problema pues $\mu(F) = 0$ como veremos a continuación.

Sea $x_0 \in F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n := F \cap B(x_0, n)$. Luego $\mu(F) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(F_n)$, y entonces basta ver que $\mu(F_n) = 0$ para todo $n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y $0 < \rho < n$. Como los espacios $\alpha$-Ahlfors son espacios de tipo homogéneo entonces satisfacen la PHD. Como $F_n$ es acotado existen a lo sumo $N_\rho$ puntos $\rho$–dispersos $x_1, \ldots, x_{N_\rho} \in F_n$. Por la Observación 2.4 se tiene que $\{B(x_i,\rho)\}_{i=1}^{N_\rho}$ es un cubrimiento finito de $F_n$ y entonces

$$\mu(F_n) \leq \sum_{i=1}^{N_\rho} \mu\big(B(x_i,\rho)\big) \leq c_\mu \rho^\alpha N_\rho. \tag{19}$$

Para hacer una estimación de $N_\rho$ notemos que, como los puntos $x_1, \ldots, x_{N_\rho}$ son $\rho$-dispersos, $B(x_i, \frac{\rho}{2K}) \cap B(x_j, \frac{\rho}{2K}) = \varnothing$ si $i \neq j$. Además $\bigcup_{i=1}^{N_\rho} B(x_i, \frac{\rho}{2K}) \subset B(x_0, 2Kn)$, dado que si $y \in \bigcup_{i=1}^{N_\rho} B(x_i, \frac{\rho}{2K})$ existe $1 \leq j \leq N_\rho$ tal que $y \in B(x_j, \frac{\rho}{2K})$. Como además $x_j \in B(x_0, n)$ entonces

$$d(y,x_0) \leq K\big(d(y,x_j) + d(x_j,x_0)\big) < \frac{\rho}{2} + Kn \leq 2Kn.$$

Luego

$$N_\rho \frac{\rho^s}{c_\nu(2K)^s} \leq \sum_{i=1}^{N_\rho} \nu\big(B(x_i, \tfrac{\rho}{2K})\big) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{N_\rho} B(x_i, \tfrac{\rho}{2K})\right) \leq \nu\big(B(x_0, 2Kn)\big).$$

Entonces $N_\rho \leq \nu\big(B(x_0,2Kn)\big)c_\nu(2K)^s\rho^{-s}$ y de (19), se tiene

$$\mu(F_n) \leq c_\mu c_\nu \nu\big(B(x_0,2Kn)\big)(2K)^s\rho^{\alpha-s}.$$

Tomando $\rho \to 0$ obtenemos $\mu(F_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos probar. □

Corolario 3.1. *Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio $\alpha$-Ahlfors con medida $\mu$ para algún $\alpha > 0$ y $F \subset \mathbb{X}$ cerrado. Si $(F,d)$ es $s$-Ahlfors con medida $\nu$, con $0 \leq s < \alpha$, entonces $d(x,F)^\beta \in A_p$ para $s-\alpha < \beta < (\alpha-s)(p-1)$ y $1 < p < \infty$.*

Demostración. Tomando $w(x) = d(x, F)^{s-\alpha}$ se tiene por el Teorema 3.3 que $w^\gamma \in A_1$ para todo $0 < \gamma < 1$. Luego, por la Proposición 3.2, se tiene $w^\eta \in A_p$ para $1 - p < \eta < 1$. Pero $w(x)^\eta = d(x, F)^\beta$, donde $\beta = (s - \alpha)\eta$ y al imponer las condiciones para $\eta$, se obtiene $s - \alpha < \beta < (\alpha - s)(p - 1)$, como se quería probar. □

## 3.3. Resultados en espacios más generales

Recordemos que el Teorema 2.1 dado por [**MS79**] nos permitía cambiar la topología de un espacio de tipo homogéneo por otra equivalente que lo hiciera 1-Ahlfors. Con el objetivo de encontrar una clase de pesos, cuando el espacio no es necesariamente Ahlfors, un camino posible a seguir es analizar la correspondencia del problema en espacios con estructuras geométricas equivalentes. Allí radica la importancia de la próxima proposición, en la cual se muestra que las clases de pesos $A_p$ sobre los espacios $(\mathbb{X}, d, \mu)$ y $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$ son equivalentes, donde $\delta$ es la casi-métrica dada por el Teorema 2.1. Antes, se mostrará un lema que relaciona la geometría de estos espacios.

Lema 3.3 ([**ACT14**, Lemma 3]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo con constante triangular $K$ y constante de duplicación $A$. Si $\delta$ es la casi-métrica definida por Macías y Segovia en el Teorema 2.1 y $c$ es la constante de la condición 1-Ahlfors para $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$, entonces*

(i) *para toda $d$-bola $B_d$ existe una $\delta$-bola $B_\delta$ tal que $B_d \subset B_\delta$ y $\mu(B_\delta) \leq 2c\mu(B_d)$;*
(ii) *para toda $\delta$-bola $B_\delta$ existe una $d$-bola $B_d$ tal que $B_\delta \subset B_d$ y $\mu(B_d) \leq cA^m\mu(B_\delta)$, con $m$ un número natural mayor que $\log_2(5K^2)$.*

Demostración. Para probar (i) tomemos $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r_0 > 0$ fijos, $B_d := B_d(x_0, r_0)$ y sea $r^* = \mu(B_d)$. Como $2r^* > 0$ entonces por (13),

$$B_\delta(x_0, 2r^*) = \bigcup\{B : B \text{ es una } d\text{-bola}, x_0 \in B \text{ y } \mu(B) < 2r^*\}.$$

Luego $B_d \subset B_\delta(x_0, 2r^*)$. Como $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$ es 1-Ahlfors, si $2r^* < \mu(\mathbb{X})$ entonces se tiene también

$$\mu\big(B_\delta(x_0, 2r^*)\big) \leq c2r^* = 2c\mu(B_d).$$

En el caso $2r^* \geq \mu(\mathbb{X})$ se tiene, por la Proposición 2.1, que $\mathbb{X}$ está acotado. Luego la bola $B_\delta := B_\delta(x_0, 2 \operatorname{diám}_\delta(\mathbb{X}))$ es la buscada, dado que $B_d \subset B_\delta = \mathbb{X}$ y $\mu(B_\delta) = \mu(\mathbb{X}) \leq 2r^* \leq 2c\mu(B_d)$.

Para ver (ii) sean $t_0 > 0$, $z_0 \in \mathbb{X}$ fijos y $B_\delta := B_\delta(z_0, t_0)$. Basta ver que existen $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r^* > 0$ tales que

$$\mu(B_d(x_0, r^*)) < t_0 \quad \text{y} \quad B_\delta(z_0, t_0) \subseteq B_d(x_0, 5K^2r^*), \tag{20}$$

puesto que

$$\mu\big(B_d(x_0, 5K^2r^*)\big) \leq A^m\mu\big(B_d(x_0, r^*)\big) \leq A^m t_0 \leq cA^m\mu\big(B_\delta(z_0, t_0)\big),$$

con $m \geq \lceil \log_2(5K^2) \rceil$ entero, donde hemos usado la duplicación de $\mu$ para las $d$-bolas y la condición 1-Ahlfors de $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$.

Para ver (20), sea

$$s = \sup\{r > 0 : B \text{ es una } d\text{-bola con radio } r, z_0 \in B \text{ y } \mu(B) < t_0\}.$$

Si $s < \infty$ entonces existen $\frac{s}{2} < r^* \leq s$ y una $d$-bola $B_d$ con radio $r^*$ tal que $z_0 \in B_d$ y $\mu(B_d) < t_0$. Tomando $x_0$ el centro de $B_d$ se tiene que $B_\delta(z_0, t_0) \subseteq B_d(x_0, 5K^2 r^*)$. En efecto, si $y \in B_\delta(z_0, t_0)$ entonces $\delta(y, z_0) < t_0$ y existe una $d$-bola $B_d(w, r)$ que contiene a $y$ y a $z_0$ con medida menor que $t_0$ y $r \leq s < 2r^*$. Por lo tanto

$$d(y, x_0) \leq K^2\big(d(y, w) + d(w, z_0) + d(z_0, x_0)\big) < K^2(2r + r^*) < 5K^2 r^*.$$

Si $s = \infty$, todas las $d$-bolas que contienen a $z_0$ tienen medida menor que $t_0$, y como podemos escribir $\mu(\mathbb{X}) = \lim_{n\to\infty} \mu(B(x, n)) \leq t_0$, para algún $x \in \mathbb{X}$, entonces debe ser $\mu(\mathbb{X}) < \infty$, y por la Proposición 2.1, $\mathbb{X}$ está acotado. Fijando $x_0 \in \mathbb{X}$ y considerando $r^* = 2\text{diám}(\mathbb{X})$ se obtiene (20), porque $B_d(x_0, r^*) = B_d(x_0, 5K^2 r^*) = \mathbb{X}$. □

PROPOSICIÓN 3.4 ([**ACT14**, Corollary 4]). *Sea $w$ un peso. Entonces, para $1 \leq p \leq \infty$, $w \in A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ si y sólo si $w \in A_p(\mathbb{X}, \delta, \mu)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $w \in A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ con $p > 1$, $B_\delta$ una $\delta$-bola y $B_d$ la $d$-bola dada por el Lema 3.3 (II). Luego existen $c \geq 1$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(B_\delta)^p}\left(\int_{B_\delta} w\, d\mu\right)\left(\int_{B_\delta} w^{\frac{1}{1-p}}\, d\mu\right)^{p-1} \\
&\qquad\qquad \leq \frac{(cA^m)^p}{\mu(B_d)^p}\left(\int_{B_d} w\, d\mu\right)\left(\int_{B_d} w^{\frac{1}{1-p}}\, d\mu\right)^{p-1} \\
&\qquad\qquad \leq (cA^m)^p C,
\end{aligned}$$

donde $c$ y $m$ sólo dependen de las constantes geométricas de espacio, $C$ es la constante de la condición $A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ para $w$ y $A$ la constante de duplicación del espacio $(\mathbb{X}, d, \mu)$.

Si $w \in A_1(\mathbb{X}, d, \mu)$, nuevamente por el Lema 3.3 (II) se tiene, denotando por $\mathcal{M}_\mu^d$ y $\mathcal{M}_\mu^\delta$ al operador maximal actuando en el espacio $(\mathbb{X}, d, \mu)$ y $(\mathbb{X}, \delta, \mu)$ respectivamente, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^\delta w(x) &= \sup_{B_\delta \ni x} \frac{w(B_\delta)}{\mu(B_\delta)} \\
&\leq cA^m \sup_{B_d \ni x} \frac{w(B_d)}{\mu(B_d)} \\
&= cA^m \mathcal{M}_\mu^d w(x) \\
&\leq cA^m C w(x),
\end{aligned}$$

donde $c$, $m$ y $A$ son como antes y $C$ es la constante de la condición $A_1(\mathbb{X}, d, \mu)$ para $w$.

El caso $p = \infty$ se deduce de su definición y de lo demostrado antes, puesto que si $w \in A_\infty(\mathbb{X}, d, \mu)$ entonces $w \in A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ para algún $1 \leq p < \infty$. Luego $w \in A_p(\mathbb{X}, \delta, \mu)$ y por lo tanto $w \in A_\infty(\mathbb{X}, \delta, \mu)$.

Como $B_\delta$ es arbitraria entonces $w \in A_p(\mathbb{X}, \delta, \mu)$, para $1 \leq p \leq \infty$. La demostración del recíproco es análoga utilizando el Lema 3.3 (i). □

Ahora estamos en condiciones de describir una nueva familia de pesos en $A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ a través del operador maximal definido sobre el espacio $(\mathbb{X}, \delta)$ 1-Ahlfors con medida $\mu$.

Corolario 3.2. *Sea $(\mathbb{X}, \delta)$ el espacio 1-Ahlfors con medida $\mu$, donde $\delta$ es la casi-métrica definida en el Teorema 2.1. Sea $F \subset \mathbb{X}$ cerrado. Si $(F, d)$ es $s$-Ahlfors con medida $\nu$, para $0 \leq s < 1$, entonces $\delta(x, F)^\beta \in A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ para $-(1-s) < \beta < (1-s)(p-1)$ y $1 < p < \infty$.*

Demostración. Por el Corolario 3.1, $\delta(x, F)^\beta \in A_p(\mathbb{X}, \delta, \mu)$ para $-(1-s) < \beta < (1-s)(p-1)$ y $1 < p < \infty$. Entonces, de la Proposición 3.4, se tiene $\delta(x, F)^\beta \in A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ para los mismos valores de $\beta$. □

Hasta ahora no hemos logrado prescindir de la casi-métrica $\delta$ en su totalidad. Si podemos obtener el peso en relación con la métrica original $d$ y una condición para el conjunto $F$ en $(\mathbb{X}, d)$ que resulte equivalente a ser $s$-Ahlfors en $(\mathbb{X}, \delta)$ habremos obtenido una familia de pesos en la clase $A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ independiente de la casi-métrica $\delta$.

Para el primer problema tenemos el siguiente lema.

Lema 3.4 ([**ACT14**, Lemma 8]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo y $\delta$ la casi-métrica dada por el Teorema 2.1. Si $F \subset \mathbb{X}$ es cerrado, entonces*

$$A^{-1}\delta(x, F) \leq \mu\big(B_d(x, d(x, F))\big) \leq A^l \delta(x, F),$$

*donde $A$ es la constante de duplicación de $\mu$ y $l$ un entero positivo que satisface $l \geq \lceil \log_2(3K^2) \rceil$, con $K$ la constante triangular de $d$.*

Demostración. Si $x \in F$, $d(x, F) = 0$, y entonces, como $F$ es cerrado, debe ser $B_d(x, d(x, F)) = \{x\}$. Pero por ser $(\mathbb{X}, d, \mu)$ no atómico $\mu(B_d(x, d(x, F))) = 0$, entonces, por definición de la casi-métrica $\delta$ se tiene $\delta(x, F) = 0$ y la desigualdad del lema se satisface trivialmente.

Sea $x \notin F$. Como $F$ es cerrado existe $0 < \varepsilon < d(x, F)$ y, como la definición de distancia a un conjunto viene dada por un ínfimo, tenemos que para ese $\varepsilon$ existe $y_0 \in F$ tal que $d(x, y_0) < d(x, F) + \varepsilon$. Luego $d(x, y_0) < 2d(x, F)$. Por otro lado, si $B$ es una $d$-bola que contiene a $x$ y a $y_0$, entonces $\delta(x, F) \leq \delta(x, y_0) \leq \mu(B)$. En particular vale para $B = B_d(x, 2d(x, F))$, y por la duplicación de $\mu$

$$\delta(x, F) \leq \mu\big(B_d\big(x, 2d(x, F)\big)\big) \leq A\mu\big(B_d\big(x, d(x, F)\big)\big).$$

Para obtener la otra desigualdad, sea $y_0 \in F$ tal que para algún $\varepsilon > 0$, $\delta(x, y_0) < \delta(x, F) + \varepsilon$ y $B$ una $d$-bola que contenga a $x$ y a $y_0$

con $\mu(B) < \delta(x, y_0) + \varepsilon$. Luego

$$\mu(B) < \delta(x, F) + 2\varepsilon.$$

Sean $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r_0 > 0$ el centro y radio de $B$, respectivamente. Si $y \in B_d(x, d(x, y_0))$, luego

$$d(y, x) < d(x, y_0) \leq K\big(d(x, x_0) + d(x_0, y_0)\big) < 2Kr_0,$$

y por lo tanto

$$d(y, x_0) \leq K\big(d(y, x) + d(x, x_0)\big) < 2K^2 r_0 + Kr_0 \leq 3K^2 r_0.$$

Entonces $B_d(x, d(x, y_0)) \subset B_d(x_0, 3K^2 r_0)$ y como $\mu$ es doblante se tiene

$$\begin{aligned} \mu\big(B_d\big(x, d(x, F)\big)\big) &\leq \mu\big(B_d\big(x, d(x, y_0)\big)\big) \\ &\leq \mu\big(B_d(x_0, 3K^2 r_0)\big) \\ &\leq A^l \mu\big(B(x_0, r_0)\big) \\ &\leq A^l \big(\delta(x, F) + 2\varepsilon\big), \end{aligned}$$

donde $l \geq \big\lceil \log_2(3K^2)\big\rceil$ es independiente de $\varepsilon$. Tomando $\varepsilon$ tendiendo a cero se obtiene lo que queríamos. □

Finalmente la condición para el conjunto $F$ en $(\mathbb{X}, d)$ que resulta equivalente a ser $s$-Ahlfors en $(\mathbb{X}, \delta)$ es la de ser $s$-dimensional, como veremos continuación.

Definición 3.6. Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo. Se dice que $F \subset \mathbb{X}$ cerrado es ***s*-dimensional con respecto a $\boldsymbol{\mu}$**, para algún $s \geq 0$, si existen una medida de Borel $\nu$ soportada en $F$ y tres constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ tales que para todo $x \in F$ y $0 < r < \text{diám}(F)$, se satisfacen las siguientes dos condiciones:

(D1) para todo $t > 0$ tal que $\mu(B_d(x, t)) < r$, se tiene que $\nu(B_d(x, t)) \leq c_1 r^s$;
(D2) existe una $d$-bola $B_d$ que contiene a $x$ con $\mu(B_d) < c_2 r$ y $\nu(B_d) \geq c_3 r^s$.

Teorema 3.4 ([**ACT14**, Theorem 9]). *Sean $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo y $F \subset \mathbb{X}$ cerrado. Entonces $F$ es $s$-dimensional con respecto a $\mu$ para $s \geq 0$ si y sólo si $F$ es $s$-Ahlfors en $(\mathbb{X}, \delta)$ con medida $\nu$.*

Demostración. Supongamos primero que $F$ es $s$-dimensional con respecto a $\mu$ con medida asociada $\nu$ y probemos que $F$ es $s$-Ahlfors en $(\mathbb{X}, \delta)$ con medida $\nu$.

Sean $x \in F$ y $0 < r < \text{diám}_d(F)$. Si $B_d$ es la $d$-bola dada en la Definición 3.6 (D2) y $c_2 \leq 1$ entonces se tiene por lo visto en (13) que $B_d \subset B_\delta(x, r)$. Luego

$$\nu\big(B_\delta(x, r)\big) \geq \nu(B_d) \geq c_3 r^s.$$

Si $c_2 > 1$ se toma $B_d$ la $d$-bola dada por (D2) para $\widetilde{r} = \frac{r}{c_2} < \text{diám}_d(F)$. Entonces $B_d$ contiene a $x$, $\mu(B_d) < c_2\widetilde{r} = r$ y $\nu(B_d) \geq c_3\frac{r^s}{c_2^s}$, por lo que $B_d \subset B_\delta(x,r)$ y

$$\nu\big(B_\delta(x,r)\big) \geq \nu(B_d) \geq c_3\frac{r^s}{c_2^s}.$$

Tomando $c = \text{máx}\{c_3^{-1}, c_2^s\, c_3^{-1}\}$ se tiene, para cualquier $x \in F$ y cada $0 < r < \text{diám}_d(F)$, que

$$\nu\big(B_\delta(x,r)\big) \geq c^{-1}r^s. \tag{21}$$

Para ver que se satisface la otra desigualdad de la condición Ahlfors para $(F,\delta)$ con respecto a $\nu$, notar primero que

$$B_\delta(x,r) \subset \bigcup_{t\in T} B_d(x,t), \tag{22}$$

donde $T = \{t > 0 : \mu(B_d(x,t)) \leq A^m r\}$, con $m \geq \lceil \log_2(3K^2)\rceil$ entero y $A$, $K$ las constantes geométricas del espacio $(\mathbb{X}, d, \mu)$. En efecto, si $y \in B_\delta(x,r)$ entonces existen $z \in \mathbb{X}$ y $t_0 > 0$ tales que $x, y \in B_d(z,t_0)$ y $\mu(B_d(z,t_0)) < r$. Por lo tanto

$$d(x,y) \leq K\big(d(x,z) + d(z,y)\big) \leq 2Kt_0,$$

de donde se tiene $y \in B_d(x, 2Kt_0)$.

Veamos que $\mu\big(B_d(x,2Kt_0)\big) \leq A^m r$ para algún $m$. Consideremos $w \in B_d(x,2Kt_0)$.

$$d(w,z) \leq K\big(d(w,x) + d(x,z)\big) < 2K^2t_0 + Kt_0 \leq 3K^2t_0.$$

Luego

$$\mu\big(B_d(x,2Kt_0)\big) \leq \mu\big(B_d(z,3K^2t_0)\big) \leq A^m\mu\big(B_d(z,t_0)\big) \leq A^m r,$$

con $m \geq \lceil \log_2(3K^2)\rceil$ entero.

Sea $t^* = \sup T$. Si $t^* = \infty$, entonces para todo $t > 0$ se tiene que $\mu\big(B_d(x,t)\big) \leq A^m r < 2A^m r$, y así $\nu\big(B_d(x,t)\big) \leq c_1(2A^m r)^s$, cualquiera sea $t > 0$, por la Definición 3.6 (D1). Ahora, dada $B_\delta(x,r)$, por el Lema 3.3 (ii), existe una $d$-bola $B_d$ (la cual estará contenida en $B_d(x,t)$ para algún $t$ suficientemente grande) tal que $B_\delta(x,r) \subset B_d$, de donde se sigue que

$$\nu(B_\delta(x,r)) \leq \nu(B_d) \leq c_1(2A^m r)^s,$$

como queríamos probar.

Podemos suponer entonces $t^* < \infty$. Por (22) se tiene

$$\nu\big(B_\delta(x,r)\big) \leq \nu\left(\bigcup_{t\in T} B_d(x,t)\right) \leq \nu\big(B_d(x,t^*)\big).$$

Notar también que $\mu(B_d(x,t^*)) \leq A^{m+1}r$, pues para $t \in T$ tal que $t < t^* < 2t$ tenemos $B_d(x,t) \subset B_d(x,t^*) \subset B_d(x,2t)$ y por la propiedad de duplicación de $\mu$ se tiene $\mu(B_d(x, 2t)) \leq A\mu(B_d(x,t)) < A^{m+1}r$. Entonces, si $A^{m+1}r < \text{diám}_d(F)$, por la Definición 3.6 (D1) se tiene

$$\nu\big(B_\delta(x,r)\big) \leq \nu\big(B_d(x,t^*)\big) \leq c_1\big(A^{m+1}r\big)^s = Cr^s. \tag{23}$$

Si el conjunto $F$ es acotado entonces la desigualdad (23) es válida para $r < A^{-(m+1)}\text{diám}_d(F)$. Por la Observación 2.5 y lo demostrado en (21) se tiene que $(F, \delta)$ es $s$-Ahlfors con medida $\nu$.

Si $F$ es no acotado, como $\text{diám}_d(F) = \infty$ entonces (23) es válida para todo $r > 0$ y junto con (21) se tiene que $(F, \delta)$ es $s$-Ahlfors con medida $\nu$.

Para el recíproco, sean $x \in F$ y $r > 0$. Por hipótesis existe una medida de Borel $\nu$ soportada en $F$ y una constante $c \geq 1$ tal que

$$c^{-1}r^s \leq \nu\big(B_\delta(x,r)\big) \leq cr^s,$$

si $r < \text{diám}_\delta(F)$. Sea $r < \nu(F)$, y supongamos que existe $t > 0$ tal que $\mu(B_d(x,t)) < r$. Entonces $B_d(x,t) \subset B_\delta(x,r)$ y

$$\nu\big(B_d(x,t)\big) \leq \nu\big(B_\delta(x,r)\big) \leq cr^s,$$

luego (D1) se satisface tomando $c_1 = c$.

Para ver (D2) consdieremos (de la prueba del Lema 3.3 (II), p. 45) $x_0 \in \mathbb{X}$ y $r^* > 0$ tales que $\mu(B_d(x_0, r^*)) < r$ y $B_\delta(x,r) \subset B_d(x_0, 5K^2r^*)$. Tomando $B = B_d(x_0, 5K^2r^*) \ni x$, se tiene que $\mu(B) < A^m r$ y

$$\nu(B) \geq \nu\big(B_\delta(x,r)\big) \geq c^{-1}r^s,$$

con $m \geq \big\lceil \log_2(5K^2)\big\rceil$ entero. Luego (D2) se satisface con $c_3 = c^{-1}$ y $c_2 = A^m$.

Solo falta considerar el caso $\nu(F) \leq r < \text{diám}_d(F)$. En esta situación tenemos que $\nu(F) < \infty$, y por la Proposición 2.1 $\text{diám}_\delta(F) < \infty$ y por el Lema 3.3 se tiene $\text{diám}_d(F) < \infty$. Usando un argumento análogo al de la Observación 2.5 para la definición de ser $s$-dimensional con respecto a $\mu$ se tiene lo buscado. $\square$

Concluimos esta sección con el siguiente teorema, cuya demostración es consecuencia de lo visto previamente, el cual nos da la nueva familia de pesos en una clase de Muckenhoupt en un espacio no necesariamente Ahlfors.

Teorema 3.5 ([**ACT14**, Theorem 1]). *Sea $(\mathbb{X}, d, \mu)$ un espacio de tipo homogéneo y $F \subset \mathbb{X}$ cerrado $s$-dimensional con respecto a $\mu$ para $0 \leq s < 1$. Entonces*

$$w(x) = \mu\Big(B\big(x, d(x,F)\big)\Big)^\beta$$

*pertenece a $A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ para todo $-(1-s) < \beta < (1-s)(p-1)$ y $1 < p < \infty$.*

Demostración. Por el Teorema 3.4 se tiene que $F$ es $s$-Ahlfors con respecto a la medida $\nu$ de la Definición 3.6. Del Lema 3.4, se tiene la equivalencia $\mu\big(B_d(x, d(x, F))\big) \simeq \delta(x, F)$, donde $\delta$ es la casi-métrica del Teorema 2.1. Finalmente, por el Corolario 3.2, obtenemos que $\mu\big(B_d(x, d(x, F))\big)^{\beta} \in A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ para $-(1-s) < \beta < (1-s)(p-1)$ y $1 < p < \infty$. $\square$

# Conclusiones

En este trabajo desarrollamos los conceptos de métrica y casi-métrica, comprendiendo las diferencias que conllevan más allá de la definición. Vimos que casi-métricas equivalentes generan la misma topología, lo que nos permitió usar la más conveniente en cada caso.

Primero, en el Teorema 1.1, vimos un resultado de Macías y Segovia donde una casi-métrica adecuada garantiza que las bolas abiertas sean conjuntos abiertos. Para dar una escritura cuidadosa de la demostración de este resultado estudiamos el lema de metrización de espacios uniformes y lo modificamos en el Lema 1.3 para que se adecuara a las hipótesis requeridas por el teorema mencionado.

En una segunda abordamos el estudio de los espacios de tipo homogéneo y, en particular, de los espacios $\alpha$-Ahlfors. Si bien todo espacio $\alpha$-Ahlfors es un espacio de tipo homogéneo, vimos, a través de un ejemplo, que no todo espacio de tipo homogéneo es $\alpha$-Ahlfors. Nuevamente, Macías y Segovia nos proponen una casi-métrica que induce al espacio una topología equivalente a la del espacio de partida obteniendo así un espacio 1-Ahlfors. Hemos estudiado y escrito dicho resultado en el Teorema 2.1.

Para concluir el trabajo y con el objetivo de dar una aplicación de lo estudiado, hemos hallado una familia de pesos en la clase de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{X}, d, \mu)$ independiente de las casi-métricas dadas por Macías y Segovia. Para esto, estudiamos en el Capítulo 3 el operador maximal de Hardy-Littlewood y con los Teoremas 3.2, 3.3 y el Lema 3.4 logramos hallar equivalencias que nos permiten traducir problemas entre ambos contextos para elegir trabajar en el ámbito más conocido.

# Bibliografía


[ACDT14] Hugo Aimar, Marilina Carena, Ricardo Duran, and Marisa Toschi, *Powers of distances to lower dimensional sets as muckenhoupt weights*, Acta Math. Hungar. **143** (2014), no. 1, 119–137. MR 3215609

[ACT14] Hugo Aimar, Marilina Carena, and Marisa Toschi, *Muckenhoupt weights with singularities on closed lower dimensional sets in spaces of homogeneous type*, J. Math. Anal. Appl. **416** (2014), no. 1, 112–125. MR 3182751

[Bon21] Julieta Bonazza, *El operador maximal $M_\phi$ generalizado actuando sobre medidas*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2021, `https://hdl.handle.net/11185/5907`.

[CW71] Ronald R. Coifman and Guido Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Étude de certaines intégrales singulières. MR 0499948

[GCRdF85] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. MR 807149

[Jon80] Peter W. Jones, *Factorization of ap weights*, Annals of Mathematics **111** (1980), no. 3, 511–530.

[Kel75] John L. Kelley, *General topology*, Graduate Texts in Mathematics, No. 27, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975, Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.]. MR 0370454

[MS79] Roberto A. Macías and Carlos Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), no. 3, 257–270. MR 546295

[Muc72] Benjamin Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. MR 293384

[PS09] Maciej Paluszyński and Krzysztof Stempak, *On quasi-metric and metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 12, 4307–4312. MR 2538591